

研究活動報告

北海道大学大学院理学研究科数学専攻
ポスドク研究員 山本 稔

1. 研究内容・成果，及び，2005 年度研究活動報告

研究内容・成果

写像空間のトポロジーに興味をもって研究を続けています．この様な研究はホモトピー論を用いた代数トポロジーからの研究が盛んですが，私は微分トポロジー，大域的特異点論の観点から組み合わせ的に研究を行っています．今， $C^\infty(M, N)$ を n 次元多様体 M から p 次元多様体 N への滑らかな写像全体からなる位相空間とします．この空間自体を調べる事も (N が可縮で無い限り) 面白いのですが，今回は埋め込み写像全体，はめ込み写像全体，特定の特異点 (折り目特異点など) のみもつ写像全体といった部分空間 S に話を制限します．例えば S として， n 次元閉多様体 M から $n+2$ 次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^{n+2} への埋め込み写像全体を取ってきますと，結び目理論は，この部分空間 S のトポロジーを研究していると解釈できます．現在私が興味をもっているのは，向き付けられたコンパクト n 次元多様体 M から向き付けられた n 次元多様体 N への向きを保つはめ込み写像 ($2 \leq n \leq 4$) 全体の空間 $\text{Imm}(M, N)$ や，向き付けられた n 次元閉多様体 M から向き付けられた p 次元閉多様体 N への折り目写像 ($1 \leq p \leq n \leq 4$) 全体の空間 $\text{Fold}(M, N)$ のトポロジーの研究です．

isotopy invariant の構成

Arnold は S^1 から \mathbf{R}^2 へのはめ込み写像全体の空間に対して 1 次の Vassiliev 型不変量を定義し，これを決定しました (1994 年)．この不変量は cochain complex の 1 次元 cocycle として定義され，Vassiliev が結び目のアイソトピー不変量として 1990 年に導入した有限型不変量のアイデアに基づいています．閉多様体から \mathbf{R}^p への写像空間に対して計算される 1 次の局所 Vassiliev 型不変量は安定写像の isotopy 不変量になります．私は Ohmoto が 1997 年に定式化した Vassiliev cochain complex を用いる事で，向き付け可能な 3 次元多様体 M から \mathbf{R}^2 への写像空間に対して 1 次の半局所 Vassiliev 型不変量を定義してこれを調べました．また，上の写像空間の部分空間として折り目写像全体からなる空間を考えます．この部分空間に対しても 1 次の半局所 Vassiliev 型不変量を全て求めました．私は，各元の幾何的意味を見出す事で，求めた元全てが安定な折り目写像の isotopy 不変量になる事を示しました．

fold map の eversion の構成

はめ込み写像全体もしくは，沈め込み写像全体の空間の様に写像が特異点を持たない場合には Smale-Hirsch の定理，Phillips の定理等，h-principle によってこれらの空間の homotopy type が決定できます．Eliashberg は h-principle を応用する事で同じ次元の多様体間の折り目写像全体の空間の homotopy type を決定しました (1972 年)．今，赤道にのみ折り目特異点を持つ向き付けられた S^2 から向き付けられた平面への折り目写像全体の空間 $\text{Fold}(S^2, \mathbf{R}^2; S^1)$ を考えます．Milnor のはめ込み写像と呼ばれる 2 つのはめ込み写像 $\alpha, \beta : D^2 \looparrowright \mathbf{R}^2$ を用いると， $\text{Fold}(S^2, \mathbf{R}^2; S^1)$ の 2 つ元 f と g が得られます．Eliashberg の定理によれば f と g はこの空間の同じ連結成分内に入っているのですが，一見しただけではこの事は信じ難いです．そこで私は実際に f と g を結ぶ path を構成して見せ，これらは $\text{Fold}(S^2, \mathbf{R}^2; S^1)$ の同じ連結成分内に入っている事を示しました．この定理は Smale の球面の裏返し定理を実際に構成して見せた Morin-Petit の定理に対応するため折り目写像の裏返し定理と呼ばえます．

singular set の成分数の評価

向き付けられた n 次元閉多様体 M から向き付けられた p 次元閉多様体 N への折り目写像の空間 $\text{Fold}(M, N)$ を考えます．この空間の各元にたいし，その折り目写像の特異点集合 ($p-1$ 次元部分多様体) の連結成分数を対応させるという写像 $\psi : \text{Fold}(M, N) \rightarrow \mathbf{Z}$ を考えます．その時， ψ の取りうる値を決定するという問題が考えられます．今， Σ_g を向き付けられた種数 g の閉曲面とします．Eliashberg

は閉曲線族が, Σ_g をオイラー数と写像度に関する式を満たす様に分割するなら, その閉曲線族を特異点集合とする様な折り目写像が存在する事を示しました (1970 年). 私は, 閉曲面間の折り目写像を具体的に構成する事で, 写像 $\psi : \text{Fold}(\Sigma_g, \Sigma_h) \rightarrow \mathbb{Z}$ の取りうる値を種数 g, h と写像度を固定する毎に決定しました.

安定写像の埋め込み写像への持ち上げ

n 次元閉多様体 M から \mathbb{R}^p への安定写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ が射影 $\pi : \mathbb{R}^{p+k} \rightarrow \mathbb{R}^p$ と埋め込み写像 $g : M \rightarrow \mathbb{R}^{p+k}$ を用いて $f = \pi \circ g$ と書ける時, g を f の持ち上げ写像と呼びます. 1次元閉多様体から平面への安定な埋め込み写像は \mathbb{R}^3 への埋め込み写像に持ち上がる事はすぐに解る事です. また, 閉曲面から \mathbb{R}^3 への安定写像が \mathbb{R}^4 への埋め込み写像に持ち上がるための必要十分条件は Carter-Saito(1995 年), Satoh(2000 年) によって得られました. 私は閉曲面から平面への任意の安定写像が \mathbb{R}^4 への埋め込み写像に持ち上がる事を, 曲面結び目の研究でよく用いられる motion picture を応用する事で示しました.

2005 年度研究活動報告

発表論文

- 学術雑誌
 - “FIRST ORDER SEMI-LOCAL INVARIANTS OF STABLE MAPS OF 3-MANIFOLDS INTO THE PLANE” (to appear in Proceedings of the London Mathematical Society).
- プレプリント
 - “Lifting a generic map of a surface into the plane to an embedding into 4-space” (投稿中)
 - “Eversion and concordance of a fold map of 2-sphere to the plane with a connected singular set” (投稿中)
 - “The number of singular set components of fold maps between oriented surfaces” (投稿中)

口頭発表

- “On a representation of maps between polyhedrons”,
北海道大学特異点論セミナー,
北海道大学, 2005 年 4 月 15 日.
- “On a representation of maps between surfaces”,
「特異点における不変量」
近畿大学, 2005 年 6 月 11 日.
- “The minimal number of singular set for fold maps”,
大阪市立大学 Friday Seminar on Knot Theory,
大阪市立大学, 2005 年 7 月 15 日.
- “The minimal number of singular set for fold maps between oriented surfaces”,
The Second East Asian School of Knots and Related Topics in Geometric Topology,
Dalian University of Technology (中国), 2005 年 8 月 2 日.
- “平面への安定写像の不変量について”,
第 52 回トポロジーシンポジウム
高知大学, 2005 年 8 月 8 日.
- “閉曲面間の折り目写像における特異点集合の個数”,
日本数学会 2005 年度秋季総合分科会トポロジー分科会,
岡山大学, 2005 年 9 月 21 日.

- “On right equivalence of spiral immersions of planar surfaces”,
Seminário em Singularidades,
ICMC-USP (ブラジル), 2005 年 10 月 6 日.
- “Number of singular set components of fold maps between oriented surfaces”,
Conferência,
IME-USP (ブラジル), 2005 年 10 月 10 日.
- “Number of singular set components of fold maps between surfaces”,
九州大学金曜トポロジーセミナー,
九州大学, 2005 年 10 月 21 日.

2. 発表論文リスト

学術雑誌

- “IMMERSIONS OF SURFACES WITH BOUNDARY INTO THE PLANE”,
Pacific Journal of Mathematics **212** (2003), no. 2, 371–376.
- “Regular equivalence of special generic maps of manifolds into the plane”,
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **136** (2004), 465–483.
- “FIRST ORDER SEMI-LOCAL INVARIANTS OF STABLE MAPS OF 3-MANIFOLDS INTO THE PLANE” (to appear in Proceedings of the London Mathematical Society).

プレプリント

- “Lifting a generic map of a surface into the plane to an embedding into 4-space” (投稿中)
- “Eversion and concordance of a fold map of 2-sphere to the plane with a connected singular set” (投稿中)
- “The number of singular set components of fold maps between oriented surfaces” (投稿中)

報告集

- “EVERSION OF A FOLD MAP OF S^2 TO \mathbf{R}^2 WITH ONE SINGULAR SET”,
特異点論における新しい方法と対象 (京都, 2003), 数理解析研究所講究録 1374 (2004), 188–200.

3. 主たる口頭発表のリスト

国際会議

- “Some equivalences of special generic maps into the plane”,
国際研究集会 Singularity Theory and its Applications, 北京化工大学 (中国), 2001 年 7 月 5 日.
- “Difference between regular and weak regular equivalence of special generic maps”,
国際研究集会 Singularities and Related Subjects Second Workshop In Changchun, 東北師範大学 (中国), 2001 年 7 月 9 日.
- “Quasi-equivalence of stable maps into the plane”,
Banach Center Symposium Polish-Japanese Singularity Theory Working Days, Będlewo (ポーランド), 2001 年 9 月 24 日.
- “Local first order invariants for stable maps from a 3-dimensional manifold into the plane”,
国際研究集会 7th Workshop on Real and Complex Singularities, ICMC-USP (ブラジル), 2002 年 7 月 30 日.

- “Eversion and cobordism of a fold map of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”,
第 12 回日本数学会国際研究集会 Singularity Theory and Its Applications, 札幌コンベンション
センター (日本), 2003 年 9 月 25 日 .
- “On the space of fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”,
VIII Sao Carlos International Workshop on Real and Complex Singularities at CIRM, CIRM
(フランス), 2004 年 7 月 20 日 .
- “The minimal number of singular set for fold maps between oriented surfaces”,
The Second East Asian School of Knots and Related Topics in Geometric Topology,
Dalian University of Technology (中国), 2005 年 8 月 2 日 .

国内会議

- “Kauffman の論文, “Planar surface immersions” の誤りについて”,
「いろいろなカテゴリーでの多様体のトポロジーと特異点」, 和歌山市民会館, 1999 年 9 月 9 日 .
- “Immersion of surfaces with boundary into the plane”,
「関西微分解析セミナー」, 近畿大学, 1999 年 11 月 27 日 .
- “Regular equivalence of special generic maps of orientable manifolds into the plane”,
「特異点論と力学系」, 京都大学数理解析研究所, 2000 年 6 月 1 日 .
- “Difference between regular equivalence and weak regular equivalence of special generic maps
into the plane” ,
「関西微分解析セミナー」, 近畿大学, 2001 年 2 月 3 日 .
- “3 次元空間内の曲面と平面への安定写像との関連性について”,
「4 次元多様体と曲面の埋め込み」, 京都大学数理解析研究所, 2001 年 7 月 23 日 .
- “Quasi-equivalence of stable maps into the plane” ,
「特異点の数理」, 近畿大学, 2001 年 11 月 12 日 .
- “Relation between surfaces in 4-space and stable maps into the plane”,
「Winter Workshop of Topology in Sendai 2002」, 東北大学, 2002 年 1 月 31 日 .
- “定値折り目写像の正則同値と弱正則同値による分類の差について”,
日本数学会 2002 年度年会トポロジー分科会, 明治大学, 2002 年 3 月 30 日 .
- “Local first order invariants for stable maps into the plane”,
「実・複素特異点のトポロジー II」, 鹿児島大学, 2002 年 12 月 9 日 .
- “曲面から平面への安定写像と 4 次元空間への埋め込みリフトについて”,
日本数学会 2003 年度年会トポロジー分科会, 東京大学, 2003 年 3 月 26 日 .
- “Eversion of a fold map of S^2 to \mathbf{R}^2 with one singular set”,
「特異点論における新しい方法と対象」, 京都大学数理解析研究所, 2003 年 11 月 28 日 .
- “On the space of fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”,
「多様体のトポロジーの未来へ」東京大学, 2004 年 11 月 8 日 .
- “On a representation of maps between surfaces”,
「特異点における不変量」,
近畿大学, 2005 年 6 月 11 日 .
- “平面への安定写像の不変量について”,
第 52 回トポロジーシンポジウム
高知大学, 2005 年 8 月 8 日 .

- “閉曲面間の折り目写像における特異点集合の個数”,
日本数学会 2005 年度秋季総合分科会トポロジー分科会,
岡山大学, 2005 年 9 月 21 日.

教室セミナー

- “平面へのスペシャル・ジェネリック写像の (弱) 正則同値による分類”,
広島大学トポロジーセミナー, 広島大学, 2001 年 6 月 12 日.
- “ユークリッド空間への安定写像と埋め込みリフトの関連性について”,
九州大学金曜トポロジーセミナー, 九州大学, 2002 年 7 月 5 日.
- “Local first order invariants for stable maps from 3-manifolds into the plane”,
Seminários de Singularidades, ICMC-USP (ブラジル), 2002 年 8 月 23 日.
- “An estimate of fold components of fold maps between oriented surfaces”,
北海道大学特異点論セミナー, 北海道大学, 2004 年 10 月 15 日.
- “On the space of pairs of immersions of the 2-disk to the plane with common boundary circle”,
Colloquia, University of South Florida (アメリカ), 2005 年 1 月 14 日.
- “On the space of pairs of immersions with the common boundary”,
Topology Seminar, Brigham Young University (アメリカ), 2005 年 1 月 25 日.
- “Estimates of number of singular components for fold maps”,
TOPOLOGY SEMINAR, University of California, Riverside (アメリカ), 2005 年 2 月 2 日.
- “On a representation of maps between polyhedrons”,
北海道大学特異点論セミナー,
北海道大学, 2005 年 4 月 15 日.
- “The minimal number of singular set for fold maps”,
大阪市立大学 Friday Seminar on Knot Theory,
大阪市立大学, 2005 年 7 月 15 日.
- “On right equivalence of spiral immersions of planar surfaces”,
Seminário em Singularidades,
ICMC-USP (ブラジル), 2005 年 10 月 6 日.
- “Number of singular set components of fold maps between oriented surfaces”,
Conferência,
IME-USP (ブラジル), 2005 年 10 月 10 日.
- “Number of singular set components of fold maps between surfaces”,
九州大学金曜トポロジーセミナー,
九州大学, 2005 年 10 月 21 日.