

研究活動報告

北海道大学大学院理学研究科数学専攻
ポスドク研究員 山本 稔

1. 研究内容・成果，及び 2004 年度研究活動報告

研究内容・成果

写像空間のトポロジーに興味をもって研究を続けています．この様な研究はホモトピー論を用いた代数トポロジーからの研究が盛んですが，私は微分トポロジー，大域的特異点論の観点から研究を行っています．今， $C^\infty(M, N)$ を n 次元多様体 M から p 次元多様体 N への滑らかな写像全体からなる位相空間とします．この空間自体を調べる事も (N が可縮で無い限り) 面白いのですが，今回は埋め込み写像全体，はめ込み写像全体，特定の特異点 (A_1 -type singularity など) のみもつ写像全体といった部分空間 S に話を制限します．例えば S として， n 次元閉多様体 M から $n+2$ 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^{n+2} への埋め込み写像全体を取ってきますと，結び目理論は，この部分空間 S のトポロジーを研究していると解釈できます．現在私が興味をもっているのは，向き付けられたコンパクト n 次元多様体 M から向き付けられた n 次元多様体 N への向きを保つはめ込み写像 ($2 \leq n \leq 4$) 全体の空間 $\text{Imm}(M, N)$ や，向き付けられた n 次元閉多様体 M から向き付けられた p 次元閉多様体 N への折り目写像 ($1 \leq p \leq n \leq 4$) 全体の空間 $\text{Fold}(M, N)$ のトポロジーの研究です．

image homotopy class の決定

向き付けられた compact な境界付き曲面 W から平面への向きを保つはめ込み全体を image homotopy という同値関係で分類する研究が，Kauffman によってなされています．しかし，彼の論文には途中に幾つかの誤りがあるため，その分類結果は曲面の種数が 1，境界成分の数が 2 以上の時に間違いである事が分かりました．私は彼が分類を誤った上記の場合について，image homotopy 類の完全不変量を与えました．

regular equivalence class の決定

可微分多様体間の写像が special generic map であるとは，特異点が全て定値折り目特異点である時をいいます．Porto と Furuya は閉多様体 M から平面への special generic maps に対して，regular equivalence という同値関係を定義しました．私はまず 3 次元以上の向き付け可能な閉多様体から平面への 2 つの special generic maps が regularly equivalent になる必要条件を与え，3 次元から 5 次元では必要十分条件を与えました．次に，weak regular equivalence という同値関係を定義して，3 次元以上の向き付け可能な閉多様体から平面への 2 つの special generic maps が weakly regularly equivalent になる必要十分条件を与えました．以上の結果を合わせる事により，ホモトピー球面から平面への 2 つの special generic maps で，weakly regularly equivalent だが，regularly equivalent でないものの存在を示しました．

isotopy invariant の構成

Arnold は S^1 から \mathbb{R}^2 へのはめ込み写像全体の空間に対して 1 次の Vassiliev 型不変量を定義し，これを決定しました．この不変量は cochain complex の 1 次元 cocycle として定義され，Vassiliev が結び目のアイソトピー不変量として導入した有限型不変量のアイデアに基づいています．閉多様体から \mathbb{R}^p への写像空間に対して計算される 1 次の局所 Vassiliev 型不変量は安定写像の isotopy 不変量になります．私は向き付け可能な 3 次元多様体 M から \mathbb{R}^2 への写像空間に対して 1 次の半局所 Vassiliev 型不変量を定義してこれを調べました．また，上の写像空間の部分空間として折り目写像全体からなる空間を考えます．この部分空間に対しても 1 次の半局所 Vassiliev 型不変量を全て求めました．私は，各元の幾何的意味を見出す事で，求めた元全てが安定な折り目写像の isotopy 不変量になる事を示しました．

fold map の eversion の構成

はめ込み写像全体もしくは、沈め込み写像全体の空間の様に写像が特異点を持たない場合には Smale-Hirsch の定理, Phillips の定理等, h-principle によってこれらの空間の homotopy type が決定できます. Eliashberg は h-principle を応用する事で同じ次元の多様体間の折り目写像全体の空間の homotopy type を決定しました. 今, 赤道にのみ折り目特異点を持つ向き付けられた S^2 から向き付けられた平面への折り目写像全体の空間 $\text{Fold}(S^2, \mathbf{R}^2; S^1)$ を考えます. Milnor のはめ込み写像と呼ばれる 2 つのはめ込み写像 $\alpha, \beta: D^2 \looparrowright \mathbf{R}^2$ を用いると, $\text{Fold}(S^2, \mathbf{R}^2; S^1)$ の 2 つ元 f と g が得られます. Eliashberg の定理によれば f と g はこの空間の同じ連結成分内に入っているのですが, 一見しただけではこの事は信じ難いです. そこで私は実際に f と g を結ぶ path を構成して見せ, これらは $\text{Fold}(S^2, \mathbf{R}^2; S^1)$ の同じ連結成分に入っている事を示しました. この定理は Smale の球面の裏返し定理を実際に構成して見せた Morin-Petit の定理に対応するため折り目写像の裏返し定理と呼べます.

2004 年度研究活動報告

発表論文

- プレプリント

“FIRST ORDER SEMI-LOCAL INVARIANTS OF STABLE MAPS OF 3-MANIFOLDS INTO THE PLANE” (投稿中).

- 報告集

“EVERSION OF A FOLD MAP OF S^2 TO \mathbf{R}^2 WITH ONE SINGULAR SET”,
数理解析研究所講究録 1374 (2004), 188–200.

口頭発表

- “On fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”,
北海道大学特異点論セミナー, 北海道大学, 2004 年 4 月 23 日.
- “On fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”,
九州大学金曜トポロジーセミナー, 九州大学, 2004 年 7 月 2 日.
- “On the space of fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”,
VIII Sao Carlos International Workshop on Real and Complex Singularities at CIRM, CIRM (フランス), 2004 年 7 月 20 日.
- “An estimate of fold components of fold maps between oriented surfaces”,
北海道大学特異点論セミナー, 北海道大学, 2004 年 10 月 15 日.
- “On the space of fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”,
「多様体のトポロジーの未来へ」東京大学, 2004 年 11 月 8 日.
- “On the space of pairs of immersions of the 2-disk to the plane with common boundary circle”,
Colloquia, University of South Florida (アメリカ), 2005 年 1 月 14 日.
- “On the space of pairs of immersions with the common boundary”,
Topology Seminar, Brigham Young University (アメリカ), 2005 年 1 月 25 日.
- “Estimates of number of singular components for fold maps”,
TOPOLOGY SEMINAR, University of California, Riverside (アメリカ), 2005 年 2 月 2 日.

2. 発表論文リスト

学術雑誌

- “IMMERSIONS OF SURFACES WITH BOUNDARY INTO THE PLANE”, Pacific Journal of Mathematics **212** (2003), no. 2, 371–376.
- “Regular equivalence of special generic maps of manifolds into the plane”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **136** (2004), 465–483.

プレプリント

- “FIRST ORDER SEMI-LOCAL INVARIANTS OF STABLE MAPS OF 3-MANIFOLDS INTO THE PLANE”, Ph.D. Thesis, Kyushu Univ., March 2004 (投稿中).

報告集

- “EVERSION OF A FOLD MAP OF S^2 TO \mathbf{R}^2 WITH ONE SINGULAR SET”, 特異点論における新しい方法と対象 (京都, 2003), 数理解析研究所講究録 1374 (2004), 188–200.

3. 主たる口頭発表のリスト

国際会議

- “Some equivalences of special generic maps into the plane”, 国際研究集会 Singularity Theory and its Applications, 北京化工大学 (中国), 2001年7月5日.
- “Difference between regular and weak regular equivalence of special generic maps”, 国際研究集会 Singularities and Related Subjects Second Workshop In Changchun, 東北師範大学 (中国), 2001年7月9日.
- “Quasi-equivalence of stable maps into the plane”, Banach Center Symposium Polish-Japanese Singularity Theory Working Days, Będlewo (ポーランド), 2001年9月24日.
- “Local first order invariants for stable maps from a 3-dimensional manifold into the plane”, 国際研究集会 7th Workshop on Real and Complex Singularities, ICMC-USP (ブラジル), 2002年7月30日.
- “Eversion and cobordism of a fold map of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”, 第12回日本数学会国際研究集会 Singularity Theory and Its Applications, 札幌コンベンションセンター (日本), 2003年9月25日.
- “On the space of fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set”, VIII Sao Carlos International Workshop on Real and Complex Singularities at CIRM, CIRM (フランス), 2004年7月20日.

国内会議

- “Kauffman の論文, “Planar surface immersions” の誤りについて”, 「いろいろなカテゴリーでの多様体のトポロジーと特異点」, 和歌山市民会館, 1999年9月9日.
- “Immersion of surfaces with boundary into the plane”, 「関西微分解析セミナー」, 近畿大学, 1999年11月27日.
- “Regular equivalence of special generic maps of orientable manifolds into the plane”, 「特異点論と力学系」, 京都大学数理解析研究所, 2000年6月1日.
- “Difference between regular equivalence and weak regular equivalence of special generic maps into the plane”, 「関西微分解析セミナー」, 近畿大学, 2001年2月3日.

- “3次元空間内の曲面と平面への安定写像との関連性について”,
「4次元多様体と曲面の埋め込み」, 京都大学数理解析研究所, 2001年7月23日.
- “Quasi-equivalence of stable maps into the plane” ,
「特異点の数理」, 近畿大学, 2001年11月12日.
- “Relation between surfaces in 4-space and stable maps into the plane” ,
「Winter Workshop of Topology in Sendai 2002」, 東北大学, 2002年1月31日.
- “定値折り目写像の正則同値と弱正則同値による分類の差について” ,
日本数学会 2002年度年会トポロジー分科会, 明治大学, 2002年3月30日.
- “Local first order invariants for stable maps into the plane” ,
「実・複素特異点のトポロジー II」, 鹿児島大学, 2002年12月9日.
- “曲面から平面への安定写像と4次元空間への埋め込みリフトについて” ,
日本数学会 2003年度年会トポロジー分科会, 東京大学, 2003年3月26日.
- “Eversion of a fold map of S^2 to \mathbf{R}^2 with one singular set” ,
「特異点論における新しい方法と対象」, 京都大学数理解析研究所, 2003年11月28日.
- “On the space of fold maps of S^2 to \mathbf{R}^2 with a connected singular set” ,
「多様体のトポロジーの未来へ」東京大学, 2004年11月8日.

教室セミナー

- “平面へのスペシャル・ジェネリック写像の(弱)正則同値による分類” ,
広島大学トポロジーセミナー, 広島大学, 2001年6月12日.
- “ユークリッド空間への安定写像と埋め込みリフトの関連性について” ,
九州大学金曜トポロジーセミナー, 九州大学, 2002年7月5日.
- “Local first order invariants for stable maps from 3-manifolds into the plane” ,
Seminários de Singularidades, ICMC-USP (ブラジル), 2002年8月23日.
- “An estimate of fold components of fold maps between oriented surfaces” ,
北海道大学特異点論セミナー, 北海道大学, 2004年10月15日.
- “On the space of pairs of immersions of the 2-disk to the plane with common boundary circle” ,
Colloquia, University of South Florida (アメリカ), 2005年1月14日.
- “On the space of pairs of immersions with the common boundary” ,
Topology Seminar, Brigham Young University (アメリカ), 2005年1月25日.
- “Estimates of number of singular components for fold maps” ,
TOPOLOGY SEMINAR, University of California, Riverside (アメリカ), 2005年2月2日.