

研究内容・成果, 及び, 2003年度研究活動報告

I. 研究内容・成果

私の研究目的は, ガロア表現の変形とその p 進的保型性に関して, Gouvêa 氏により, 彼の著書 “Arithmetic of p -adic modular forms” (Lecture Notes in Math., Vol. 1304, 1988) の中で定式化された次の予想を解決することである:

「Gouvêa の予想」 p を奇素数, k を標数 p の有限体, $G_{\mathbb{Q}}$ を有理数体 \mathbb{Q} の絶対ガロア群とし, $\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(k)$ を絶対既約でモジュラーな剰余ガロア表現とする. $\bar{\rho}$ に対し, k を剰余体にもつ完備局所ネーター環への $\bar{\rho}$ の変形達の間で普遍的 (Mazur 氏により構成された) 普遍変形環を $R(\bar{\rho})$, その変形の中で特に (Katz 氏により定式化された) p 進保型形式に付随するものの中で普遍的 (Gouvêa 氏により構成された) 普遍モジュラー変形環を $T(\bar{\rho})$ とする. このとき, 自然な全射

$$R(\bar{\rho}) \rightarrow T(\bar{\rho})$$

は同型写像であろう. すなわち, $\bar{\rho}$ の全ての変形は p 進保型形式に付随するであろう.

ここで主張される $R(\bar{\rho}) \cong T(\bar{\rho})$ の両辺を, それぞれ対応する適当なイデアルで商をとることにより, 原理的に様々なガロア表現の保型性を, 常に導くことができるという意味で, 代数的整数論において「Gouvêa の予想」の解決が与える影響は非常に大きい. また, 非常に抽象的な可換環論の手法で構成された普遍変形環 $R(\bar{\rho})$ に対し, p 進保型形式の空間に作用するヘッケ環から構成された普遍モジュラー変形環 $T(\bar{\rho})$ と同型であることを通して, 幾何的な意味付けを与えるという点でも大きな意義を持つ主張である.

さて, $k = \mathbb{F}_p$ で $\bar{\rho}$ が付随する保型形式のレベルが p であるという特別な場合に, Gouvêa と Mazur 両氏は共著論文 “On the density of modular representations” (in “Computational perspectives on number theory,” 1998) においてこの予想を解決しているが, 彼らの結果を, 論文 “On Gouvêa’s conjecture on controlling the conductor” (研究論文リスト [1]) において, レベルが Np (N は p と互いに素な任意の正整数) の場合へ拡張することができた.

しかし, レベルを p から Np まで拡張できたとはいえ, (1) $k = \mathbb{F}_p$, (2) $\bar{\rho}$ が付随する保型形式は \mathbb{Z}_p 上定義され “non-critical slope” を持つ, (3) $\bar{\rho}$ の変形問題は “unobstructed” である, という条件は仮定したままであり, これらをいかにして外すかということが課題となったが, 論文 “On Gouvêa’s conjecture in the unobstructed case” (研究論文リスト [2]) において, 上の三つの条件のうち条件 (3) を仮定するだけで, 「Gouvêa の予想」が成立することを証明できた.

さらに、固有形式 f を最初に与えておいて、素数 p ごとに f に付随する剰余ガロア表現 $\bar{\rho}$ を考えた時に、一体どのくらいの頻度で条件 (3) が満たされるのかという問題について、論文 “On the unobstructedness of the deformation problems of residual modular representations” (研究論文リスト [3]) において、 f の重さが 2 よりも大きい場合には、有限個を除いた全ての素数 p に対して、条件 (3) が満たされることを証明できた。

II. 2003 年度研究報告

今年度から進めている研究の目的は、上で述べた「Gouvêa の予想」を、剰余ガロア表現 $\bar{\rho}$ がヒルベルト保型形式に付随している場合へ拡張し解決することである。これを実現するためには、 $\bar{\rho}$ に付随するヒルベルト保型形式の p 進無限族を構成することが重要な課題となる。

この問題については、2002 年のプレプリント “Familles p -adiques de formes automorphes pour GL_n ” において Chenevier 氏により提示されている、有理数体 \mathbb{Q} 上定義されたある代数群上の保型形式の p 進無限族の構成法を、総実代数体上定義された四元数環から定まる代数群上の保型形式に対して適用することにより解決できるものと考えていたが、2003 年 11 月 22 日から 3 週間、カリフォルニア大学ロサンゼルス校 (UCLA) の肥田晴三教授のもとで研究させていただいたことで、保型形式の p 進無限族に関する研究が発展し、プレプリント “On p -adic families of Hilbert cusp forms of finite slope” (研究論文リスト [4]) において、非常に特別な場合ではあるが、「ヒルベルト版 Gouvêa の予想」の解決に有用と思われるヒルベルト保型形式の p 進無限族を構成することができた。この結果については、2003 年 12 月 8 日に UCLA Number Theory Seminar において、“On p -adic families of Hilbert modular forms of positive slope” と題して口頭発表させていただいた (主たる口頭発表のリスト [9])。

また、今年度の口頭発表として、2003 年 10 月 18 日に北海道大学・ソウル大学校ジョイントシンポジウムにおいて “On Gouvêa’s conjecture in the unobstructed case” と題して、「Gouvêa の予想」の部分的な解決について発表させていただいたことも報告させていただく (主たる口頭発表のリスト [8])。

発表論文リスト

1. On Gouvêa's conjecture on controlling the conductor, *J. Number Theory* **94** (2002), 90-102.
2. On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case, *J. Number Theory* **99** (2003), 120-138.
3. On the unobstructedness of the deformation problems of residual modular representations, submitted to *Tokyo J. of Math.*, 2003.
4. On p -adic families of Hilbert cusp forms of finite slope, preprint, 2004.

主たる口頭発表のリスト

1. 剰余 Galois 表現の普遍変形環に関する Gouvêa の予想について, 日本数学会代数学分科会, 早稲田大学, 2000 年 3 月 28 日.
2. On Gouvêa's conjectures on the universal deformation rings of residual Galois representations, 「代数的整数論とその周辺」研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2000 年 12 月 21 日.
3. On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case, Number Theory Seminar, ETH, Zurich, 2001 年 6 月 1 日.
4. On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case I, Number Theory Seminar, UCLA, Los Angeles, 2001 年 10 月 25 日.
5. On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case II, Number Theory Seminar, UCLA, Los Angeles, 2001 年 10 月 30 日.
6. On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case, 「保型形式およびそれに付随するディリクレ級数の研究」研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2002 年 1 月 31 日.
7. On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case, 広島整数論集会, 広島大学, 2002 年 7 月 29 日.
8. On Gouvêa's conjecture in the unobstructed case, 北海道大学・ソウル大学校ジョイントシンポジウム, ソウル大学校, 2003 年 10 月 18 日.
9. On p -adic families of Hilbert modular forms of positive slope, Number Theory Seminar, UCLA, Los Angeles, 2003 年 12 月 8 日.