平成 16 年 2 月 18 日
渡辺道之

# 研究内容・成果

## 1. 非線形 Schrödinger 方程式に対する逆散乱問題

非線形 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + F(u)$$

における散乱理論では、解の無限の過去での状態と無限の未来の状態とを比較する。その対応を散乱作用素と呼んでいる。$t \to \pm\infty$ としたとき、解 $u(t)$ が $u(t) \to e^{-itH_0}\phi_\pm$, $(H_0 = -\Delta)$ となる場合、対応 $S : \phi_- \to \phi_+$ が散乱作用素である。散乱理論ではこの作用素の存在を示すことが主な目的である。逆に、散乱作用素を観測データとし、その情報から非線形項を決定しようという問題が逆散乱問題である。非線形 Schrödinger 方程式の散乱、逆散乱問題ともに 1970 年代ごろより盛んに研究されている。

逆問題についてはこれまで、べき乗型の非線形項 $F(u) = V(x)|u|^{p-1}u$ についての研究が主流であり、散乱作用素から方程式の係数が再構成できる事が示されてきた（'74 W.A.Strauss 〜 '01 R.Weder）。

一方、量子力学的多体粒子系における 1 体近似の 1 つである Hartree 近似によって導出される Hartree 方程式は、たたみ込み型の 3 次の非線形項 $F(u) = (V * |u|^2)u$ をもつ非線形 Schrödinger 方程式である。これは数学的にも興味深い方程式で、散乱理論については多くの研究がなされてきた。しかし、逆問題についてはこれまで結果がなかったものである。

本研究は Hartree 型方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + V_0(x)u + (V_1 * |u|^2)u$$

に対して逆問題に取り組んだもので、散乱作用素が確立している範疇で、ポテンシャル $V_0(x)$ や粒子間の相互作用の力を表す $V_1(x)$ の決定など、いくつかの結果を得ている。

まず $V_1(x) = \lambda|x|^{-\sigma}$ の場合について、$V_0(x)$ と $\lambda$（定数）が散乱作用素から一意的に再構成できる事が示された（'01 M.Watanabe）。ただしこの結果では $\sigma$ は与えられた定数としている。このべき $\sigma$ をも散乱作用素から求められないだろうかと考え研究を行った結果、$V_0(x) = 0, V_1(x) = \lambda|x|^{-\sigma}$ の場合において、散乱作用素から $\lambda$ と $\sigma$（ともに定数）を求めるための公式を作ることに成功した（'02 M.Watanabe）。今まで知られているどの結果も、非線形項のべきの値が与えられていれば散乱作用素から方程式の係数を決定することができる、というものであった。非線形項のべきの値についての取り組みは本研究が初めてであり、上記の結果はこの分野ではまったく新しいものである。この成果により、$V_0(x) = 0, V_1(x) = \lambda|x|^{-\sigma}$ の場合は、散乱作用素の情報だけから非線形項が完全に再構成できる事がわかった。粒子間の相互作用がより一般的な形の場合については最近、$V_0(x) = 0, V_1(x) = V_1(|x|)$ であれば、次元の制限 $2 \le n \le 6$ の下で $V_1(|x|)$ の一意性を示すことができた（'04 M.Watanabe）。

## 2. 線形 Schrödinger 方程式の 2 次元逆問題

線形 Schrödinger 方程式

$$(-\Delta + V(x))u = Eu$$

を満たすもので散乱現象を表す解は

$$u(x) \sim e^{i\sqrt{E}\omega\cdot x} + \frac{e^{i\sqrt{E}r}}{r^{(n-1)/2}}A(E;\theta,\omega), \quad r = |x| \to \infty, \theta = x/r, \omega \in S^{n-1}$$

という挙動を示すものであり、$A(E;\theta,\omega)$ は散乱振幅と呼ばれている。$A(E;\theta,\omega)$ からポテンシャル $V(x)$ を再構成する問題が散乱の逆問題である。特にエネルギー $E>0$ を固定しての逆問題が応用上も重要であり多くの研究がなされている。3 次元以上の場合は理論的に解けており、他の方程式系、波動方程式や Dirac 方程式の結果も知られている（'97 H.Isozaki）。しかし 2 次元においては、3 次元の場合とは問題の構造が異なることもあり、ポテンシャルが小さいなどの仮定の下でいくつかの結果はあるが、一般の場合は未解決である。そのためか波動方程式など他の方程式に対する 2 次元逆問題に関する結果は少ない。

本研究では、エネルギーに依存する複素数値ポテンシャル $V(x)=i\sqrt{E}b(x)$ を持つ空間 2 次元での線形 Schrödinger 方程式の逆散乱問題を扱っている。この方程式は摩擦項を持つ波動方程式

$$w_{tt}-\Delta w+b(x)w_t=0$$

の時間周期解 $w=e^{i\sqrt{E}t}u(x)$ から導かれる式であり、この波動方程式の逆問題は上記線形 Schrödinger 方程式の逆散乱問題へと帰着される。3 次元以上の場合は $|b(x)|$ が十分小さければ $S$-行列から $b(x)$ が再構成できることがわかっている（'01 K.Mochizuki）が、2 次元の結果はない。この研究において、空間 2 次元では低エネルギーに制限することで $b(x)$ の小ささの仮定なしに散乱現象を表す解の存在がわかり、逆問題における $b(x)$ の一意性はほぼ示された（'04 M.Watanabe）。また 2 次元逆問題では、複素幾何光学解がいわゆる $\bar{\partial}$-方程式（一般化された Cauchy-Riemann の方程式）を満たすことが非常に重要であるが、これは複素数値ポテンシャルの場合は一般に満たされない。本研究において、Novikov の複素幾何光学解は、実は純虚数値ポテンシャルについては一般化された Cauchy-Riemann の方程式を満たすことに気づいた。このことは純虚数値ポテンシャルの場合は実数値の場合と同様の結果を得る可能性があることを示すものである。現在は再構成について、逆境界値問題における Brown-Uhlmann('97) と Knudsen('02) の方法を複素数値ポテンシャルの場合に適用し、上記波動方程式の $b(x)$ を再構成する方向で研究を進めている。

## 2003 年度研究活動報告

- 8 月　研究集会「線形作用素のスペクトル解析と偏微分方程式」（中央大学）にて口頭発表
- 10 月　黒田成俊先生古希記念シンポジウム「微分方程式と物理数学」（東京大学）に出席
- 11 月　PDE セミナー（北海道大学）にて口頭発表
- 12 月　Symposium on Current Topics in Mathematical Science (COE Workshop in 2003 北海道大学) に出席
- 1 月〜2 月　COE プログラム 「Special Months：Navier-Stokes 方程式」（北海道大学）に出席

以上

平成16年 2月18日

渡辺　道之

# 研究業績リスト

## 論文

① M. Watanabe, Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity,
Tokyo Journal of Mathematics. Vol.24, No.1 (2001), 59-67.

② M. Watanabe, Uniqueness in the inverse scattering problem for Hartree type equation,
Proceedings of the Japan Academy, Vol.77, Ser.A, No.9 (2001), 143-146.

③ M. Watanabe, Reconstruction of the Hartree type nonlinearity,
Inverse Problems, Vol.18, No.6 (2002), 1477-1481.

## プレプリント準備中

① M. Watanabe, Uniqueness on an inverse scattering problem for the 2D Schrödinger operator with energy dependent complex potential.

② M. Watanabe, Uniqueness in an inverse problem for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity.

## 講究録

① 渡辺道之「Inverse scattering problem for the nonlinear Schrödinger equations with cubic convolution nonlinearity」

数理解析研究所講究録 1255　2002年4月. 98-102.

## 口頭発表

① 渡辺道之　「非線形シュレディンガー方程式の逆散乱」

松本偏微分方程式研究集会（1998年10月　信州大学にて）

② 渡辺道之　「Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity」

学習院大学スペクトル理論セミナー（1998年10月　学習院大学にて）

③　渡辺道之　「Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity」

日本数学会函数方程式論分科会（1999 年 3 月　学習院大学にて）

④　渡辺道之　「Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity」

線形及び非線形散乱理論小研究集会（1999 年 12 月　東京都立大学にて）

⑤　渡辺道之　「Inverse scattering problem for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity」

浜松偏微分方程式研究集会　（2001 年　9 月　静岡大学にて）

⑥　渡辺道之　「Inverse scattering problems for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity」

神楽坂解析セミナー（2001 年 10 月　東京理科大学にて）

⑦　渡辺道之　「Inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with cubic convolution nonlinearity」

研究集会　「スペクトル・散乱理論とその周辺」（2001 年 12 月　京都大学にて）

⑧　渡辺道之　「Inverse scattering problem for Schrödinger equations with cubic nonlinearity」

国際会議　「不連続性同定の逆問題と関連する研究」（2002 年 2 月　北海道大学にて）

⑨　渡辺道之　「Inverse scattering problem for the nonlinear Schrödinger equations with cubic convolution nonlinearity」

国際会議　「微分作用素のスペクトルと逆問題」（2002 年 10 月　京都大学にて）

⑩　渡辺道之　「純虚数値のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式の２次元逆問題に関する１つの注意」

研究集会　「線形作用素のスペクトル解析と偏微分方程式」（2003 年 8 月　中央大学にて）

⑪　渡辺道之　「Inverse scattering problems for nonlinear Schrödinger equations」

PDE セミナー　（2003 年 11 月　北海道大学にて）

以上