

# 研究活動報告

COE 研究員  
梅田典晃

## 研究内容・成果

申請者は反応-拡散方程式及び反応-拡散系の初期値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, u \in \mathbf{R}^N, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^d \end{cases} \quad (\text{IVP})$$

の非負の解について研究してきた。現在までの研究とその成果について述べる。なお、論文は [1] 等、論文リストの番号で表す。

**1. 研究の背景** 反応-拡散方程式の解の挙動は、化学反応における物質の温度変化や、数理生態学における個体数の変動など、さまざまな反応-拡散現象を表す。初期値問題 (IVP) は上記の反応-拡散方程式を初期値問題として表現するものであり、そこで、有限時間で解の爆発 (爆発の定義については、2. の方で記述する) や時間大域解の存在などが研究されてきた。この分野の研究は 1966 年の Fujita の研究から始まり、今まで多くの人々によって様々な研究が行われており、現在でも盛んに研究されている。(IVP) において、解  $u(x, t)$  は場所  $x$ 、時間  $t$  における、物質の温度や、生物の集団の個体数などを表現する。また、 $u_t$  は解の時間変化率、 $\Delta u$  は、方程式の拡散項、非線形項  $f(u)$  は方程式の反応項という。また、複数の物質等の相互作用を考察する時に、解などをベクトルの形にして、方程式 (IVP) が連立方程式の形で表現されるとき、(IVP) は反応-拡散系と呼ぶ。ここで、 $N \geq 1$  は、物質等の種類の数として表現される。反応-拡散系の研究も盛んで、 $N = 2$  の場合において、Escobedo and Herrero (1991 年) や、Mochizuki and Huang (1998 年) 等によって、また  $N \geq 3$  の場合でも Renclawowicz(2000 年) 等によって解の研究が行われている。

**2. 研究の目的** 申請者は (IVP) の解について行われているさまざまな研究のうち、有限時間での爆発、時間大域解の存在、解の一意性、解の漸近挙動などの研究を行ってきた。特に、申請者は  $f_i(u) = u_{i+1}^{p_i}$  ( $i$  は整数) の場合を扱ってきた。ここで記号の説明を行うと、物質の種類数  $N \geq 1$ 、空間次数  $d \geq 1$ 、非線形項の指数  $p_i > 0$ 、初期値  $u_{i,0}$  を非負の有界連続関数とする。あと、任意の整数  $i$  に対して  $u_{N+i} = u_i$ 、 $u_{N+i,0} = u_{i,0}$ 、 $p_{N+i} = p_i$  が成り立つとするこのとき、この方程式は少なくとも時間に対して局所的に非負で有界な解を持つ。また、与えられる非線形項  $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$  と初期値  $u_0 = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  に対して、 $T^* = T^*(f, u_0)$  を解の存在時間または解の爆発時間とする。もし、 $T^* = \infty$  時、解は大域的という。もう一方で、 $T^* < \infty$  とし、 $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u_i(t)\|_\infty = \infty$  となるような  $i$  が存在する時、解は有限時間で爆発するという。ここで、解が有限時間で爆発する場合や解が時間大域的に存在する場合における、初期値  $u_0$  や非線形項の指数  $p$  の条件を調べたり、また解の一意性や、時間大域解の時間無限大における解の挙動について研究することが目的であった。さらに、最近  $N = 1$  の場合において解の爆発する場所を評価する事や、 $f(u) = u^p$  の形で表せないより一般的な  $f$  について解の挙動を調べることも目標にした。

**3. 研究の成果**  $N = 1$  の場合、非負の値をとる初期値  $u_0$  と非線形項  $f(u) = u^p$  に対して、次のような結果がある。(Aguirre and Escobedo(1986 年~1987 年)、Lee and Ni(1987 年) 等)

1.  $p \leq 1$  の時、(IVP) の任意の解は時間大域的である。
2.  $1 < p \leq 1 + 2/d$  の時、(IVP) の任意の自明で無い解 ( $u \neq 0$ 、ここでは  $u_0 \neq 0$  を意味する) は有限時間で爆発する。
3.  $p > 1 + 2/d$  の時、(IVP) において初期値の形によって、大域的でない解と大域的な解に分かれる。
4.  $p \geq 1$  の時、または  $p < 1$  で初期値  $u_0 \neq 0$  の時、解は一意的である。
5.  $p < 1$  かつ  $u_0 \equiv 0$  の時、解は一意的ではない。

申請者は、これらの結果を物質の種類の数  $N$  が3以上の一般的な形に拡張した [1],[2]。ただし、形は複雑になるので、ここでは省略する。また、上の2,3に関しては非線形項を  $f_i(x, t) = |x|^{\sigma_i} u_{i+1}^{p_i}$  の形に拡張した方程式に対して結果を出す事が出来た [4]。さらに上記の方程式系の結果とは別に、時間大域解が存在するとき (上の 1,3(b)) の時間無限方向への解の漸近挙動を評価した。

以上、申請者の研究の成果である。

## 2004年度研究活動報告

儀我美一教授との共同研究で、 $N = 1$  で  $f(u) = u^p$  ( $p > 1$ ) であるとき、初期値が定数  $M$  ( $> 0$ ) 以下であり、空間無限遠方で  $M$  に収束するような関数であるとき (但し、恒等的に  $M$  ではない)、解の爆発時間に (一番最初に) 爆発する場所が空間無限遠点全体のみであり、爆発時間  $T(f, u_0)$  が、初期値を恒等的に  $M$  とする場合における爆発時間  $T(f, M)$  と等しいことが分かった [3]。

さらに、非線形項  $f(x, u)$  が必ずしも  $u^p$  という形で表せない場合 ( $u \rightarrow 0$  と  $u \rightarrow \infty$  の  $u$  に対する階数が一致しない場合等) についても考えていて、次のような結果を出した (論文は未完成)。なお、ここでは簡単のために、非線形項  $f(u)$  が、ある  $p, C$  に対して、 $\lim_{u \rightarrow 0} f(u)/u^p = C$  である増加関数であると仮定する。また、初期値は  $u_0 \neq 0$  とする。

1. 十分大きな  $a$  に対して  $\int_a^\infty 1/f(s)ds = \infty$  のとき、(IVP) の解は時間大域的である。
2. 十分大きな  $a$  に対して  $\int_a^\infty 1/f(s)ds < \infty$  で  $0 < p < 1 + 2/d$  のとき、(IVP) の解は有限時間で爆発する。
3. 十分大きな  $a$  に対して  $\int_a^\infty 1/f(s)ds < \infty$  で  $p > 1 + 2/d$  のとき、(IPV) の解は初期値  $u_0$  によって、有限時間で爆発する場合と、時間大域的になる場合に分かれる

実際は  $f(u)$  が必ずしも増加関数でない等、上の条件を満たしていない場合も含んでおり、結果の方も複雑になるが、ここでは、省略する。

以上、2004年度研究活動報告とする。

## 発表論文

[1] **著者**：梅田 典晃（宇都宮大・工、非常勤講師）

**題名**：Blow-up and Large Time Behavior of Solutions of a Weakly Coupled System of Reaction-Diffusion Equations

**掲載紙名**：Tsukuba Journal of Mathematics

**年月**：2003年6月

**巻号**：27巻

**頁**：31-46

[2] **著者**：梅田 典晃（北海道大・理、COE 研究員）

**題名**：Large Time Behavior and Uniqueness of Solutions of a Weakly Coupled System of Reaction-Diffusion Equations

**掲載紙名**：Tokyo Journal of Mathematics

**年月**：2003年11月

**巻号**：26号

**頁**：347-372

[3] **著者**：儀我美一（東京大学・数理）、梅田 典晃（北海道大・理、COE 研究員）

**題名**：On blow up at space infinity for semilinear heat equations (Journal of Mathematical Analysis and Applications において査読中、プレプリント)

[4] **著者**：梅田 典晃（北海道大・理、COE 研究員）

**題名**：Existence, nonexistence of global solution and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations (投稿準備中、プレプリント)

## 主たる口頭発表

- (1) **発表者**：梅田 典晃、望月清、**題名**：反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について、**発表した学会名**：日本数学会、2000年度年会、関数方程式論分科会、**場所**：早稲田大学、**年月**：2000年3月
- (2) **発表者**：梅田 典晃、**題名**：反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について、**発表した学会名**：八戸偏微分方程式研究集会、**場所**：八戸高等専門学校、**年月**：2000年10月
- (3) **発表者**：梅田 典晃、**題名**：反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について、**発表した学会名**：都立大偏微分方程式集中セミナー2、**場所**：東京都立大学、**年月**：2000年12月
- (4) **発表者**：梅田 典晃、望月清、**題名**：反応-拡散系の大域解の存在と一意性について、**発表した学会名**：日本数学会、2001年度年会、関数方程式論分科会、**場所**：慶応大学、**年月**：2001年3月
- (5) **発表者**：梅田 典晃、**題名**：反応-拡散系の大域解の存在と一意性について、**発表した学会名**：浜松偏微分方程式研究集会、**場所**：静岡大学、**年月**：2001年9月
- (6) **発表者**：梅田 典晃、**題名**：反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について、**発表した学会名**：望月清先生退官記念講演会、**場所**：東京都立大学、**年月**：2002年2月
- (7) **発表者**：梅田 典晃、**題名**：反応-拡散系の大域解の存在と一意性について、**発表した学会名**：東京都立大学偏微分方程式セミナー、**場所**：東京都立大学、**年月**：2002年10月
- (8) **発表者**：梅田 典晃、**題名**：反応-拡散の弱い結合の系の解について、**発表した学会名**：北海道大学変微分方程式セミナー、**場所**：北海道大学、**年月**：2003年10月
- (9) **発表者**：梅田 典晃、**題名**：Solution of a system of reaction-diffusion equation  
**発表した学会名**：第5回北東数学解析研究集会 (The 5th northeastern symposium on mathematical analysis)  
**場所**：札幌コンベンションセンター、**年月**：2004年2月
- (10) **発表者**：梅田 典晃、儀我美一**題名**：解の空間無限遠方における爆発について、**発表した学会名**：北海道大学変微分方程式セミナー、**場所**：北海道大学、**年月**：2004年6月
- (11) **発表者**：梅田 典晃 **題名**：反応-拡散方程式の大域解と爆発解について、**発表した学会名**：第4回 COE 研究員連続講演会、**場所**：北海道大学、**年月**：2004年7月

- (12) **発表者**：梅田 典晃 **題名**：On global existence and blow-up of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations、  
**発表した学会名**：ソウル大学校数学BK21 および北大数学COEによる第2回数学シンポジウム (2nd HU and SNU symposium on mathematics)、  
**場所**：北海道大学、**年月**：2004年7月
- (13) **発表者**：梅田 典晃、儀我美一 **題名**：解の空間無限遠方における爆発について、  
**発表した学会名**：中央大学偏微分方程式セミナー、  
**場所**：中央大学、**年月**：2004年9月
- (14) **発表者**：梅田 典晃、儀我美一 **題名**：On blow up at space infinity for semilinear heat equations、  
**発表した学会名**：The first Euro-Japanese workshop on blow-up、  
**場所**：Comenius 大学 (スロバキア)、**年月**：2004年9月
- (15) **発表者**：梅田 典晃、儀我美一 **題名**：解の空間無限遠方における爆発について、  
**発表した学会名**：松山偏微分方程式研究集会、  
**場所**：愛媛大学、**年月**：2004年10月