2004 年 2 月 25 日

梅田典晃

# COE ポスドク研究活動報告

## 1. 研究内容・成果、及び、2003 年度研究活動報告

### 研究内容・成果

私は反応-拡散系の初期値問題の非負の解について考えて来た。今まで考えてきた方程式は

$$\begin{cases} (u_i)_t = \Delta u_i + u_{i+1}^{p_i}, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, i \in N^* = \{1, 2, \ldots N\}, \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in \mathbf{R}^d, i \in N^*, \end{cases} \tag{1}$$

と表される。ここで、物質の種類の数 $N \geq 1$, 次数 $d \geq 1$, 非線形項の指数 $p_i > 0$、初期値 $u_{i,0}$ を非負の有界連続関数とする。あと、全体を通して $i \in \mathbf{Z}$ に対して $u_{N+i} = u_i$、$u_{N+i,0} = u_{i,0}$、$p_{N+i} = p_i$ が成り立つとする。

問題 (1) は少なくとも時間に対して局所的に非負で有界な解を持っている。与えられる初期値 $u_0$ に対して、$T^* = T^*(u_0)$ を解の存在時間とする。もし、$T^* = \infty$ ならば解は大域的という。もう一方で、$T^* < \infty$ とし、$\limsup_{t \to T^*} \|u_i(t)\|_\infty = \infty$ となるような $i$ が存在するならば、解は有限時間で爆発するという。また、$\alpha_i$ を

$$\alpha_i = \frac{2(1 + p_i + p_i p_{i+1} + \ldots + p_i p_{i+1} \ldots p_{i+N-2})}{p_1 p_2 \ldots p_N - 1}$$

と置く。ここで、次のような結果を出した。

1. $p_1 p_2 \ldots p_N \leq 1$ のとき解は大域的である。
2. 任意の $i$ に対して、$p_i \geq 1$ 、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i\} \geq d$ の時、(1) の任意の自明で無い解に対して $T < \infty$ である。
3. 任意の $i$ に対して、$p_i \geq 1$ 、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i\} < d$ の時、(1) において大域的でない解と大域的な解の両方が存在し、次のように分かれる。
   (a) ある $i$ が存在し、$a_i < \alpha_i$ になるような $a_i$ に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\liminf_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} > 0$ を満たすならば、任意の (1) の解は有限時間で爆発する。
   (b) 任意の $i$ に対し、$a_i > \alpha_i$ になるような $a_i$ に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\limsup_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} < \infty$ を満たすならば、初期値の大きさによって解が大域的に存在する場合と有限時間で爆発する場合に分かれる。
4. 任意の $i$ に対して、$p_i \geq 1$ で、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ の時、解は一意的である。
5. 任意の $i$ に対して、$p_i < 1$ で、$u_0 \not\equiv$ の時、解は一意的である。
6. $p_1 p_2 \ldots p_N < 1$ で、$u_0 \equiv 0$ の時、解は一意的ではない。

なお、ここで自明でない解というのは、$u \not\equiv 0$ となる解である。

また、解が大域的である場合における漸近挙動についても研究が進んでいる。なお、私が発見した $p_1 p_2 \ldots p_N < 1$ のときの漸近挙動は $N = 1, 2$ の倍を含め初めての結果である。

さらに、(1) を 非線形項を拡張した方程式

$$\begin{cases} (u_i)_t = \Delta u_i + |x|^{\sigma_i} u_{i+1}^{p_i}, & x \in \mathbf{R}^d, t > 0, i \in N^*, \\ u_i(x,0) = u_{i,0}(x), & x \in \mathbf{R}^d, i \in N^*, \end{cases} \tag{2}$$

も扱っている。ここで、$\sigma_i$ は $0 \leq \sigma_i < d(p_i - 1)$ $(i \in N^*)$ となるように置く。ただし、$p_i = 1$ のときは $\sigma_i = 0$ とする。ここで、非斉次項 $x^{\sigma_i}$ が (2) の解 $u_i$ にどのような影響を起こすか調べてみた。そこで次のような結果を出した。ここで $\delta_i$ を

$$\delta_i = \frac{\sigma_i + p_i\sigma_{i+1} + \ldots + p_i p_{i+1} \ldots p_{i+N-2}\sigma_{i+N-1}}{p_1 p_2 \ldots p_N - 1}$$

と置く。

1. 任意の $i$ に対して、$p_i \geq 1$ で、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i + \delta_i\} \geq d$ の時、(2) の任意の自明で無い解に対して $T < \infty$ である。
2. 任意の $i$ に対して、$p_i \geq 1$ で、$p_1 p_2 \ldots p_N > 1$ で、$\max_{i \in N^*}\{\alpha_i + \delta_i\} < d$ の時、(2) において大域的でない解と大域的な解の両方が存在し、次のように分かれる。
   (a) ある $i$ が存在し、$a_i < \alpha_i + \delta_i$ になるような $a_i$ に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\liminf_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} > 0$ を満たすならば、任意の (2) の解は有限時間で爆発する。
   (b) 任意の $i$ に対し、$a_i > \alpha_i + \delta_i$ になるような $a_i$ に対して、初期値 $u_{i,0}$ が $\limsup_{|x| \to \infty} |x|^a u_{i,0} < \infty$ を満たすならば、初期値の大きさによって解が大域的に存在する場合と有限時間で爆発する場合に分かれる。

ここでも、解が大域的である場合における漸近挙動についても研究を進めている。また、この方程式でこの問題を扱ったのは、私が初めてである。

**2003 年度研究活動報告**

**2003 年 11 月** PDE セミナー (北海道大学) にて口頭発表。

**2003 年 11 月** Sapporo Guest House Symposium 15 “Evolution Equations” (札幌天神山国際ハウス) に出席。

**2003 年 11 月** Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2003（先端研究機能シンポジウム）(北海道大学、札幌天神山国際ハウス) に出席。

**2003 年 12 月** Symposium on current topics in Mathematical Science (COE Workshop 2003)(北海道大学) に出席。

**2003 年 12 月** 応用数学合同研究集会 (龍谷大学) に出席。

**2004 年 1 月** Hakozaki Workshop on Applied and Numerical Analysis (九州大学) に出席。

**2004 年 2 月** 第 5 回北東数学解析研究会 (札幌コンベンションセンター) で口頭発表。

## 2. 発表論文リスト

### 雑誌投稿

**1.** Blow-up and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Tsukuba J. Math., 27(2003), 31-46.

**2.** Large time behavior and uniqueness of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Tokyo J. Nath., 26(2003), 347-372.

**3.** Existence, nonexistence of global solution and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations (submitted).

### プレプリント

**1.** Large time behavior and uniqueness of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations (北海道大学).

**2.** Existence, nonexistence of global solution and large time behavior of solutions of a weakly coupled system of reaction-diffusion equations (北海道大学).

## 3. 口頭発表リスト

**2000 年 3 月**　反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について, 日本数学会年会にて講演 at 早稲田大学.

**2000 年 10 月**　反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について, 八戸偏微分方程式研究集会にて講演 at 八戸高専.

**2000 年 12 月**　反応-拡散系の大域解の存在と一意性について, 都立大偏微分方程式集中セミナー２にて講演 at 東京都立大学.

**2001 年 3 月**　反応-拡散系の大域解の存在と一意性について, 日本数学会年会にて講演 at 慶応大学.

**2001 年 9 月**　反応-拡散系の大域解の存在と一意性について, 浜松偏微分方程式研究集会にて講演 at 静岡大学.

**2002 年 2 月**　反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について, 望月清先生退官記念講演会にて講演 at 東京都立大学.

**2002 年 10 月**　反応-拡散系の大域解の存在と一意性について, 偏微分方程式セミナーにて講演 at 東京都立大学.

**2002 年 2 月**　反応-拡散系の解の爆発と大域解の存在について, 望月清先生退官記念講演会にて講演 at 東京都立大学.

**2002 年 10 月**　反応-拡散系の大域解の存在と一意性について, 偏微分方程式セミナーにて講演 at 東京都立大学.

**2003 年 10 月**　反応-拡散の弱い結合の系の解について, 北海道大学偏微分方程式セミナーにて講演 at 北海道大学.

**2004 年 2 月**　Solutions of a system of reaction-diffusion equations, 第 5 回北東数学解析研究会にて講演 at 札幌コンベンションセンター.