

! " " # \$ % & ' ( ) \* +

平成 20 年 3 月 14 日

日本学術振興会特別研究員

寺澤 祐高

## 1. 研究内容・成果及び 2007 年度研究活動報告

### ・研究内容・成果

私の研究の興味は、調和解析（実解析）と調和解析的手法を用いた非圧縮性 **Navier-Stokes** 方程式の（局所）可解性の問題の研究にある。調和解析の研究においては修士課程の時に、**Hardy-Littlewood** 極大作用素（=**H-L** 極大作用素）の有界性に関する不等式の最良定数に関する研究を行った。**H-L** 極大作用素は、調和解析において基本的な作用素であり、調和解析の評価において頻繁に用いられる。同作用素は、 $p$  乗可積分空間（ $1 < p \leq \infty$ ）において有界になるが、可積分空間（ $p = 1$ ）においては有界にならない。その代り、同作用素は可積分空間から弱可積分空間への有界作用素にはなる。また、同作用素には中心型と非中心型の作用素があり、中心型の作用素は非中心型の作用素より大きくない。したがって、二つの作用素の作用素ノルムには大小関係があることがわかるが、その大小関係が真の不等号になるかどうかということは自明ではない。例えば、実軸上の中心型 **H-L** 極大作用素の可積分空間から弱可積分空間への有界作用素と考えたときの作用素ノルム（=弱（1, 1）型ノルム）が非中心型ノルムより真に小さいということが示されたのは、**J. M. Aldaz** によって 1999 年に示された。また、中心型 **H-L** 極大作用素の弱（1, 1）型ノルムの値も、2003 年に **A. D. Melas** によって求められた。そのような中であって、私は、一般の、二倍条件を満たすラドン測度を持つ距離空間において、中心型 **H-L** 極大作用素の弱（1, 1）型ノルムの上からの新しい評価を得ることに成功した。また、二倍条件を満たさないラドン測度を持つ距離空間に対しても、**F. Nazarov-S. Treil-A. Volberg ('97)** による修正 **H-L** 極大作用素の有界性の結果を一般化することに成功した。（論文 1）証明の手法で特色があると思われるのは、証明の中で可測かどうかわからない集合の大きさを計るのに外測度を用いた点である。この手法は、**W. Sierpinsky('23)**, **N. Wiener('39)** により実軸上の中心型 **H-L** 極大作用素に用いられていたが、それより一般の状況で用いたのは本論文が初めてである。

また、博士課程においては、東海大学の藤井信彦氏、**L. Ephremidze** 氏との共同研究において、一次元の非中心型 **H-L** 極大作用素の最良定数を達成する関数が存在するかどうかという問題に関して否定的な回答を与えることに成功した。（論文 2）

次に、調和解析的手法を用いた非圧縮性 **Navier-Stokes** 方程式の研究について触れたい。私は、博士課程において、北海道大学（現在、九州大学所属）の前川泰則氏との共同研究によって、次元が 2 以上の場合のユークリッド空間における **Navier-Stokes**

方程式の一樣局所  $p$  乗可積分空間における局所可解性を示した。一樣局所  $p$  乗可積分空間は、本質的有界な関数全体や周期的な局所  $p$  乗可積分関数全体も含む関数空間である。関連する先行結果としては、**Koch-Tataru('01)**の結果があり、本研究で扱っている初期値の空間より広い空間で可解性を示しているため、本研究は **Koch-Tataru** の **NS** 方程式の解に関する一意性の結果の一つを与えているとみなすことができる。証明の手法としては、線形項と非線形項の一樣  $p$  乗可積分空間における評価を用いた。この評価の証明には、合成積に現れる関数の双方を単位立方格子に台を持つ関数に分解して、その各々の成分の合成積を関数の台に注意しながら足し合わせるという手法を用いた。足し合わせの際に、非線形項に現れる合成積の核の **C. W. Oseen('27)**による評価を用いた。(論文出版後にアマルガム空間 (一樣局所  $p$  乗可積分空間の一般化) の専門家である **H. Feichtinger** 氏に教示された所では、類似の手法は同空間の専門家の間では既に知られていたようである。) また、この結果の応用として、概周期関数を一樣局所  $p$  乗可積分空間の枠組みに一般化した一樣  $p$  乗可積分概周期関数を初期値とする **N-S** 方程式の解が時間正の時に、空間方向で (通常の) 概周期関数になることを示した。(論文3)

## ・ 2007年度の研究活動報告

私は前年度の10月から本年度の3月現在まで行っている研究において、**Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences** の **Helmut Abels** との共同研究により空間方向で粘性係数が増えるような **Stokes** 型のレゾルベント方程式について、従来定数係数の場合に知られていたことの類似が成り立つかどうかを調べている。粘性係数はある正の定数より大きいと仮定し、粘性係数と領域の境界の滑らかさが低い場合に結果を得ようと試みた。また、領域は有界領域および外部領域を含むような非有界領域を考え、境界条件は、一部で **Dirichlet**、一部で **Neuman** であるような場合を考えている。証明の手法には、**L. Boutet de Monvel('71)**と **G. Grubb** による境界がある場合の擬微分作用素の理論を **H. Abels('05)**が係数が滑らかでないような場合に拡張した理論を用いている。変数粘性係数のストークス作用素を定義は、圧力場を速度場に依存する部分と既知のデータに依存する部分に分けることによって、レゾルベント方程式における速度場に依存する部分を取り出すことによってなされる。この定義の仕方は、定数係数の場合の **G. Grubb-V. Solonnikov('91)**の方法に習っている。定数係数の場合の半空間上の **Stokes** 作用素は (**Grubb** の定義による) パラメーター楕円型作用素になり、パラメトリックスが存在する。そのパラメトリックスを使って、摂動半空間上のストークス作用素のパラメトリックスを構成し、それを張り合わせることによって一般の領域のストークス作用素のパラメトリックスが構成される。それらのパラメトリックスから、変数粘性係数 **Stokes** 作用素のレゾルベントの、ある領域での存在と評価がわかり、また、**H<sup>∞</sup>-calculus** 型の評価を満たすこともわかる。この事実から、変数係数 **Stokes** 作用素に対応する時間依

存型のある方程式の時間有限での  $L^p$ - $L^q$  最大正則性が示され、その事実がさらに非ニュートン流体の自由境界問題などに応用を持つことが期待される。この応用については、これからの課題であるが、変数粘性係数のストークス作用素が  $H^\infty$ -calculus 型の評価を満たすことまでの上記内容は本年度の3月中に論文にまとめ、“On Stokes Operators with variable viscosity in bounded and unbounded domains”という題で雑誌に投稿する予定である。

## 2. 発表論文リスト

1. Yutaka Terasawa<sup>1</sup>, Outer measures and weak type  $(1, 1)$  estimates of Hardy-Littlewood maximal operators, Journal of Inequalities and Applications, Hindawi Publishing Corporation, Art. ID 15063, 13pp, 2006.
2. Yasunori Maekawa<sup>2</sup>, Yutaka Terasawa<sup>1</sup>, The Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces, Differential and Integral Equations, Khayyam publishing, 19, no.4, pp 369-400, 2006.
3. Lasha Ephremidze<sup>3</sup>, Nobuhiko Fujii<sup>4</sup>, Yutaka Terasawa<sup>1</sup>, The Riesz rising sun lemma for arbitrary Borel measures with some applications, to appear in Journal of Function spaces and Applications, Publishing House Scientific Horizon.

注： 上記発表論文リストで、本報告者の名前に下線を付した。

・著者の所属・職（論文発表時）

1、2. 北海道大学大学院理学研究科大学院生

3. A. Razmadze Mathematica Institute, Georgian Academy of Sciences, Georgia, Leading Research Fellow,

4. 東海大学海洋学部清水教養教育センター教授

## 3. 主たる口頭発表のリスト

・国際学会での発表

1. 口頭、査読なし、Yasunori Maekawa, Yutaka Terasawa, Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces, 北東数学解析研究会、東北大学、2月・2005年

2. 口頭、査読あり、Yasunori Maekawa, Yutaka Teerasawa, On the Navier-Stokes equations with initial data nondecaying at space infinity, Asymptotic analysis and singularities, Sendai, 7月・2005年
3. 口頭、査読なし、Yasunori Maekawa, Yutaka Terasawa, Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces, 札幌シンポジウム、北海道大学、8月・2005年
4. 口頭、査読なし、Yasunori Maekawa, Yutaka Terasawa, Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces, Evolution equation 2006, Mons (ベルギー) and Valenciennes (フランス)、8月・2006年
5. 口頭、査読なし、Yasunori Maekawa, Yutaka Terasawa, Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces, Harmonic analysis and its applications at Tokyo, 東京女子大学、3月・2007年
6. 口頭、査読なし、Helmut Abels, Yutaka Terasawa, On Stokes operators with variable viscosity, North-Eastern symposium on Mathematical Analysis, 北海道大学、3月・2008年

・国内学会、セミナーでの発表

1. 口頭、査読なし、寺澤祐高、Hardy-Littlewood 極大作用素について、応用解析セミナー、東北大学、1月・2004年
2. 口頭、査読なし、寺澤祐高、ハーディー=リトルウッド極大作用素の弱(1, 1)評価、偏微分方程式セミナー、北海道大学、5月・2004年
3. 口頭、査読なし、前川泰則、寺澤祐高、一様局所空間に初期値をとるナビエ・ストークス方程式、偏微分方程式セミナー、北海道大学、5月・2005年
4. 口頭、査読なし、前川泰則、寺澤祐高、一様局所  $L^p$  空間におけるナビエ・ストークス方程式の初期値問題、日本数学会秋季総合分科会、岡山大学、9月・2005年
5. 口頭、査読なし、前川泰則、寺澤祐高、Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces、九州関数方程式セミナー、九州大学、11

月・2005年

6. 口頭、査読なし、前川泰則、寺澤祐高、Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces、応用解析セミナー、熊本大学、12月・2005年

7. 口頭、査読なし、前川泰則、寺澤祐高、Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local  $L^p$  spaces、NLPDE セミナー、京都大学、1月・2006年

8. 口頭、査読なし、前川泰則、寺澤祐高、米田剛、Navier-Stokes equations in the amalgam spaces  $(L^p, l^q)$ 、日本数学会年会、埼玉大学、3月・2007年

9. 口頭、査読なし、Helmut Abels, Yutaka Terasawa, On Stokes operators with variable viscosity in bounded and unbounded domains, Analysis seminar, Darmstadt University of Technology, 10月・2007年

10. 口頭、査読なし、Helmut Abels, Yutaka Terasawa, 変数粘性係数 Stokes 作用素のレゾルベント評価について、調和解析セミナー、草津セミナーハウス、12月・2007年

注： 上記口頭発表リストで、発表者に下線を付した。