

# 研究内容・成果，及び，2006年度研究活動報告

## ● 研究内容・成果

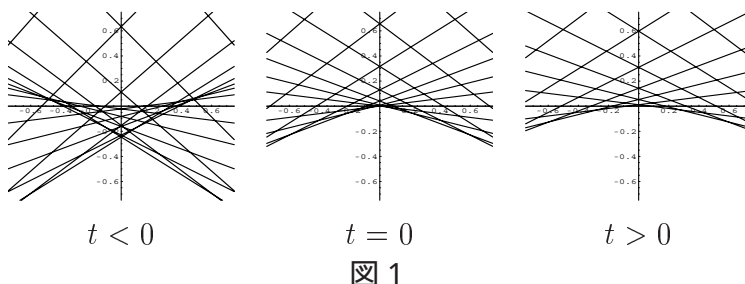
研究内容は主に微分方程式への特異点論的研究と微分幾何学への特異点論的研究です。

### 微分方程式への特異点論的研究の概要について

#### 1. 完全積分可能な微分方程式またはその分岐に対する分類問題

Implicit な 1 階の微分方程式の完全解の存在条件等はすでに研究されていますので，生成的な分類問題を研究しました．特に，1 階の implicit な常微分方程式の解の振る舞いをルジャンドル特異点論を用いて研究しました．Implicit な 1 階常微分方程式  $F(x, y, p) = 0$  ( $p = dy/dx$ ) に対して完全積分可能系 (1 パラメーター族の幾何学的解を持つクラス) の中で，解に特異点が無い場合，つまり古典解を持つ場合であるクレロー型方程式の分岐の分類問題を考えました．この方程式は解には特異点が無いのですが，その特異解が完全解の包絡線となる幾何学的に美しい特徴を持っており，また特異解には特異点が見えます (図 1) ．

1 階常微分方程式に対するクレロー型方程式の分岐の生成的な分類表には 2 つの関数モジュライと呼ばれる 2 組の無限次元パラメーターが見ることが分かりました．従来の様々な特異点の分類理論において 1 つの関数モジュライが見える例はいくつか知られており，その幾何学的な意味を与えることが大きな問題としてありますが，2 つの関数モジュライが見える具体的な分類結果はこれが最初の発見です．図 1 は 2 つの関数モジュライを固定して描いた  $(x, y)$  平面の解曲線の図です．この図から 4 ウェブ構造の分岐が見ることが分かります．



また，1 階偏微分方程式系 (Holonomic system) の研究として一般次元におけるクレロー型方程式を拡張した一般型クレロー方程式の分類問題の研究をしました．従来は方程式  $F = 0$  に対して  $F^{-1}(0)$  が部分多様体となるように仮定をつけ，はめ込みの像として考えますが，一般型クレロー方程式は，解は古典解であるが方程式の曲面には特異点があってもよい場合，つまり写像の像として現される一般的な場合を考えました．例えば正規系の場合やクレロー型方程式などがこのクラスに入ります．ルネ・トムの横断性定理やモース理論等を応用することにより生成的な分類を完成させました．さらに上述の一般型クレロー方程式の分岐の分類も与えました．この分岐の分類表の中には古典的に知られているラグランジュの常微分方程式が見ることや，クロスキャップ特異点を持つ方程式の衝突の様子の記述等，一般次元を含めてクレロー型及びその一般化の微分方程式と分岐の分類問題を，ほぼ完全に解決しました．この一般型クレロー方程式の相図はウェブ構造 (織物構造) の豊富な例を提供し，分類結果はウェブ構造の分岐理論の研究のきっかけを与えるものとなります．次の図 2 は分岐の分類リストにある一般型クレロー方程式の一例です．

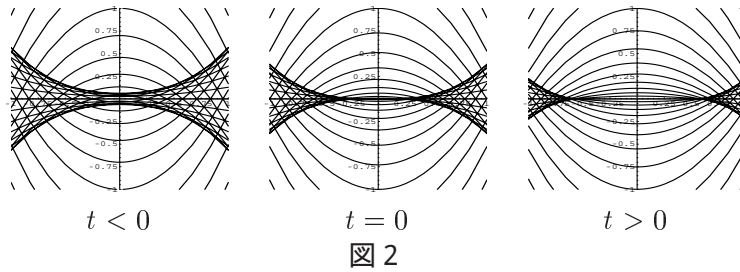


図 2

その後、より一般的な完全積分可能な 1 階常微分方程式の研究をしました。この場合、解自体も特異点を持つ場合を含み、クレロー型方程式の場合と比較すると本質的に難しい考察が必要となりますが、この場合の生成的な分岐の分類も完成させました。

## 2. 完全積分可能な implicit な 2 階常微分方程式の特異性

Implicit な 2 階常微分方程式に対して個々の方程式ではなく、統一的に解の存在条件を研究しました。滑らかな 2 階の正規常微分方程式に対して、方程式の曲面  $F^{-1}(0)$  (方程式曲面) の点を通る古典解 (滑らかな解) が局所的に存在することは、よく知られている事実です。各点で存在しますので、方程式曲面に対して局所的には 2 パラメーター族の滑らかな解があります。この性質を滑らかな完全解が存在すると呼びます。つまり、局所的に方程式曲面が 2 パラメーター族の古典解で径数づけられていることです。

そこで、implicit な 2 階常微分方程式が局所的に正規常微分方程式のように滑らかな完全解を持つための必要十分条件を求めました。その結果、2 階のクレロー型方程式となることが滑らかな完全解を持つための必要十分条件となることが分かりました。

またエンゲル・ルジャンドル変換 (エンゲル変換ではないので解は解に写さない) における双対方程式を考え、双対方程式が完全解を持つための必要十分条件を与えました。さらに、2 階のクレロー型方程式に対し同値関係を定義し生成的な分類を行いました。

Implicit な方程式の場合、方程式を満たす解 (パラメーター表示) を  $(x, y)$  平面に射影した時、解は滑らかではなく特異点を持つ場合があります。このような解は幾何学的解と呼びます。定義から古典解 (滑らかな解) は幾何学的解であることが分かります。すると滑らかな完全解を一般化した、2 パラメーター族の幾何学的解で方程式曲面が径数づけられている場合 (完全解) を考えることが自然となります。そこで完全解を持つための必要十分条件を求めました。完全解を持つためには、上述で得られた結果である、方程式が滑らかな完全解を持つ場合となるクレロー型方程式と 1 階型方程式からなることが結果として分かりました。また、ある条件の下、方程式曲面の特徴的な部分集合として、エンゲル構造に対する接触特異点集合や  $(x, y)$ ,  $(x, y, p)$  平面への射影に対する方程式の特異点集合を用いることにより、完全解を持つかどうか判断ができます。この結果は、M. Bhupal の結果を一般化した結果です。(Bhupal の結果は正則な条件の下で調べましたが、これはクレロー型方程式の特別な場合ですので、他のクレロー型方程式または 1 階型方程式については完全解を持つか判断できません)。

さらに、1 階の implicit 方程式では現れない、完全特異解という概念が 2 階の implicit な方程式の場合は定義されます。特異解は完全解に付随する方程式の幾何学的解ですが接触特異点集合に含まれます。完全特異解とは接触特異点集合が 1 パラメーター族の特異解で径数づけられていることです。この解は 2 階常微分方程式の特徴的な概念と言えますが、完全特異解が存在する必要十分条件も与えました。

## 1. ミンコフスキー空間内の部分多様体の幾何学的性質

ミンコフスキー空間内の部分多様体の幾何学的性質を関数の特異点論やルジャンドル・ラグランジュ特異点論を応用して研究を行いました。

はじめに双曲空間内の空間的超曲面に対して研究しました。特に超曲面に対して縮平面(焦面)の特異点から元の超曲面の微分幾何学的性質を研究しました。ポアンカレモデルで考えているかぎりでは縮平面は双曲空間内だけに現れますが、双曲空間内だけで定義していたのでは理論的に不完全となり、双曲空間からはみ出したド・シッター空間まで定義を拡張する必要がありますなど発見しました。これは4頂点定理からも分かることです。

さらに縮平面が同値になる条件をラグランジュ特異点論を用いることにより、代数的条件(ある次元の計算)と幾何学的条件(ある葉層との接触)の2つの立場から求めました。低次元の場合は生成的な分類が知られていますので、分類の結果を用いると幾何学的に特異葉層を図に書くことができ、この図から縮平面が同値であるかどうか判別する条件となります。

また、ルジャンドル特異点論を用いることにより、双曲空間内の全臍的超曲面で独自のものであるホ口球面に余次元が高い部分多様体が含まれることの差を記述する新たな不変量を発見しました。さらに2つの曲面がホ口球面に同じ接触をする為の必要十分条件を自然に導入される高さ関数が同値となることを示しました。

大域的な問題として、3次元ミンコフスキー空間内の空間的結び目を考えました。空間的結び目なので通常のユークリッド空間内の結び目と射影した2次元の結び目の中間に当たるようなものです。その結果3次元ミンコフスキー空間内の空間的結び目が通常のユークリッド空間内の結び目理論に正則イソトピーだけ差があるという今まで知られていなかった事実を発見しました。

さらに縮平面の研究の続きとして3つの擬球面(双曲空間、ド・シッター空間、光錐)内の空間的超曲面に対して統一的に研究を行いました。3つの擬球面に対してルジャンドル双対性が成り立つことが知られています。このことから特に光錐内の空間的超曲面に対して微分幾何学を考察することができ、双曲空間、ド・シッター空間だけでなく光錐に対しても統一的に空間的超曲面に対して平行曲面や焦面を扱えることが分かりました。この結果とラグランジュ・ルジャンドル特異点論を応用することにより、それぞれの擬球面に対してモデル曲面との接触の様子が分かりました。

また、より詳しいコースティックと波面との関係を求めました。特に同値関係における対応を研究しました。図3を見てください。この図はユークリッド空間内の楕円の縮閉線と平行曲線

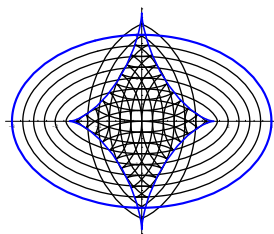


図3

を描いたものです。縮閉線は4つのカスプを持っていますがこれは頂点に対応しており四頂点

定理を表していることが分かります．また，平行曲線の特異点の軌跡が縮閉線上にあることも分かります．これらの結果は以前から知られていました．またユークリッド空間の場合，コースティックは縮平面に対応し，波面は平行曲面に対応しています．さらにコースティックはラグランジュ特異点論，波面はルジャンドル特異点論によって記述されることが知られています．特に波面の族はビッグフロントに対応しています．2つのラグランジュはめ込み芽が同値の時，対応するコースティックは同値になります．一般的に逆は成り立ちませんし，逆が成り立つ条件も具体的に知られていません．そこでこの条件を求めました．すでに，2つのラグランジュはめ込み芽がラグランジュ同値の時，それらのグラフ的ルジャンドルはめ込み芽がルジャンドル同値になり，その結果，波面の族も同値になることを示しました．安定なルジャンドルはめ込み芽の場合，波面の族が同値だとルジャンドルはめ込み芽も同値になることが知られています．逆の条件として，ラグランジュ安定の場合に対しては，ラグランジュはめ込み芽が同値であることと波面の族を保つことが同値になることが分かりました．特に，波面の族を保つならばコースティックは保たれますので，系として波面の族とコースティックが保たればラグランジュはめ込み芽が同値になることが分かります．この結果は，ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の基本的な定理になると思います．さらにユークリッド空間の場合に応用することにより，モデル曲面（この場合は球）との接触の様子を詳しく記述できるようになり，微分幾何学に新たな側面を与えることができました．

## 2. 特異点を持つ模様つき多様体

特異点を持つ模様つき多様体の分類問題を考えました．従来，模様つき多様体は多様体上の葉層構造として考えられ盛んに研究されていますが，多様体ではなく特異点を持つ多様体 (variety) 上の葉層構造を考えました．特異点を持つ模様つき多様体のある種の発散図式として定式化します．まず，どのような模様つき多様体が生成的 (一般的) に現れるのか調べるのが大切になります．そこで発散図式に対して自然な同値関係，特異点は特異点に模様は模様に移るような同値関係を導入し，この同値関係の下で特異点を持つ模様つき多様体の分類を考察しました．特に，特異点を持つ模様つき曲面の場合，多重横断性定理を用いることにより生成的な分類を得ることが出来ました．図4は模様つき曲面の生成的な分類表に現れる図を描いたものです．これらは局所的な図ののですが大域的にはこれらを張り合わせたものとなります．また，右上のクロスキャップ特異点と右下の3重点の分類表には関数モジュライが1つ現れることが分かりました．

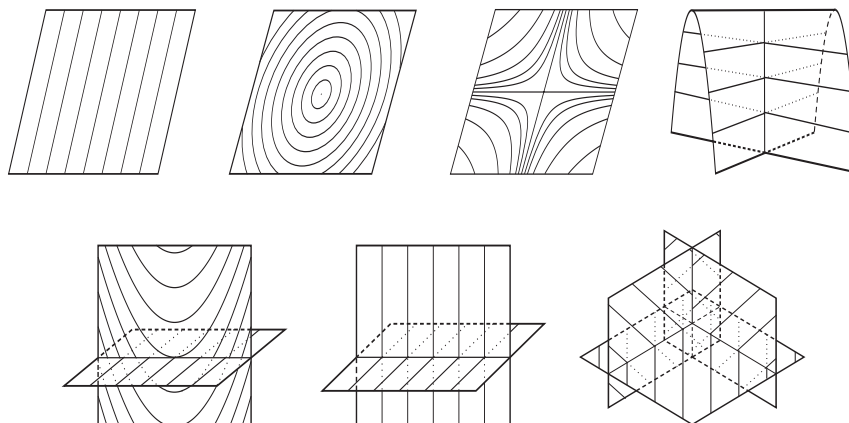


図4

## ● 2006年度研究活動報告

### 発表論文

[1] (with S. Izumiya, M. Kikuchi)

題名 : Global properties of spacelike curves in Minkowski 3-space

雑誌名 : Journal of Knot theory and its Ramifications

年, 号, ページ : 2006, 15, 869–881

[2]

題名 : Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type

雑誌名 : Hokkaido Mathematical Journal

年, 号, ページ : 2006, 35, 905–934

[3] (with K. Saji)

題名 : Singularities of smooth mappings with patterns

: accepted, to appear in The Royal Society of Edinburgh Proceedings *A*

[4]

題名 : On implicit second order ordinary differential equations:

Completely integrable and Clairaut type

: accepted, to appear in Journal of Dynamical and Control Systems

[5]

題名 : On completely integrable first order ordinary differential equations

: accepted, to appear in Proceedings of the Australian-Japanese  
Workshop on Real and Complex singularities

[6]

題名 : On complete solutions and complete singular solutions of  
second order ordinary differential equations

: accepted, to appear in Colloquium Mathematicum

[7] (with S. Izumiya)

題名 : Spacelike Parallels and Evolutes in Minkowski pseudo-spheres

: accepted, to appear in Journal of Geometry and Physics.

### 口頭発表

- 1 . 題名 : Horospherical Geometry of surfaces in hyperbolic space II:  
horo-cyclic surfaces

セミナー名：「特異点論セミナー」  
年月, 場所：2006年6月, 北海道大学

2. 題名：On caustics and wavefronts  
学会名：「特異点論-局所対大域」  
年月, 場所：2006年6月, 山口大学
3. 題名：2階常微分方程式に対する滑らかな完全解について  
セミナー名：「談話会」  
年月, 場所：2006年7月, 愛媛大学
4. 題名：Second order ordinary differential equations from the view points  
of differential geometry and singularity theory  
セミナー名：「Durham University Geometric Seminar」  
年月, 場所：2006年10月, Durham University
5. 題名：A relationship between caustics and big wave front  
学会名：Hayashibara forum on Singularities  
年月, 場所：2006年11月, France (IHES)
6. 題名：Completely integrable implicit second order ordinary  
differential equations  
学会名：Singularities Grand Sud  
年月, 場所：2006年11月, France (CIRM, Luminy)
7. 題名：Completely integrable implicit second order  
ordinary differential equations  
セミナー名：「日本数学会北海道支部講演会」  
年月, 場所：2006年12月, 北海道大学
8. 題名：2階常微分方程式の完全解と完全特異点について  
学会名：シンポジウム「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」  
年月, 場所：2007年1月, 旭川ときわ市民ホール
9. 題名：Existence and uniqueness for geometric solutions of  
implicit second order ordinary differential equations  
学会名：第9回北海道大学 - ソウル大学ジョイントシンポジウム  
年月, 場所：2007年2月, Japan (Hokkaido University)
10. 題名：2階常微分方程式に対する幾何学的解の存在と一意性  
学会名：「第14回沼津研究集会」  
年月, 場所：2007年3月, 沼津高専

# 発表論文リスト

[1]

題名 : Bifurcations of ordinary differential equations of Clairaut type

雑誌名 : Journal of Differential Equations

年, 号, ページ : 2003, 190, 579–599

[2] (with S. Izumiya, D. Pei)

題名 : Curves and surfaces in hyperbolic space

雑誌名 : Banach Center Publications. Geometric Singularity Theory

年, 号, ページ : 2004, 65, 107–123

[3] (with S. Izumiya, D. Pei)

題名 : Singularities of evolutes of hypersurfaces in hyperbolic space

雑誌名 : Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society

年, 号, ページ : 2004, 47, 131–153

[4] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)

題名 : On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2  
in hyperbolic  $n$ -space

雑誌名 : Bulletin of Brazilian Mathematical Society

年, 号, ページ : 2004, 35, 177–198

[5]

題名 : Holonomic systems of general Clairaut type

雑誌名 : Hokkaido Mathematical Journal

年, 号, ページ : 2005, 34, 247–263

[6] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)

題名 : The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space

雑誌名 : Journal of the London Mathematical Society

年, 号, ページ : 2005, 71, 779–800

[7]

題名 : Bifurcations of completely integrable first order ordinary  
differential equations

雑誌名 : Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya (in Russian)

年, 号, ページ : 2005, 33, 110–125

[8] (with S. Izumiya, M. Kikuchi)

題名 : Global properties of spacelike curves in Minkowski 3-space  
雑誌名 : Journal of Knot theory and its Ramifications  
年, 号, ページ : 2006, 15, 869–881

[9]

題名 : Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type  
雑誌名 : Hokkaido Mathematical Journal  
年, 号, ページ : 2006, 35, 905–934

[10] (with K. Saji)

題名 : Singularities of smooth mappings with patterns  
: accepted, to appear in The Royal Society of Edinburgh Proceedings *A*

[11]

題名 : On implicit second order ordinary differential equations:  
Completely integrable and Clairaut type  
: accepted, to appear in Journal of Dynamical and Control Systems

[12]

題名 : On completely integrable first order ordinary differential equations  
: accepted, to appear in Proceedings of the Australian-Japanese  
Workshop on Real and Complex singularities

[13]

題名 : On complete solutions and complete singular solutions of  
second order ordinary differential equations  
: accepted, to appear in Colloquium Mathematicum

[14] (with S. Izumiya)

題名 : Spacelike Parallels and Evolutes in Minkowski pseudo-spheres  
: accepted, to appear in Journal of Geometry and Physics.

[15] (with Y. Machida)

題名 : Classifications of implicit second order ordinary differential equations  
of Clairaut type  
: preprint. submitted.

[16]

題名 : A sufficient condition that contact equivalence implies right equivalence  
for smooth function germs  
: preprint. submitted.



[17] (with S. Izumiya)

題名 : Caustics and wave front propagations: Applications to  
differential geometry  
: preprint. submitted.

[18] (with S. Izumiya and K. Saji)

題名 : Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space  
: preprint.

[19] (with S. Izumiya and F. Tari)

題名 : Folding maps on surfaces in the hyperbolic and  
de Sitter spaces and duality  
: preprint.

[20]

題名 : Uniqueness for geometric solutions of implicit second order  
ordinary differential equations  
: preprint.

# 主たる口頭発表のリスト

## ● 国際シンポジウム

1. 題名 : The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space  
学会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days II  
年月, 場所 : 2002年9月, Polish (Bedlewo)
2. 題名 : Bifurcations of general Clairaut type equations  
学会名 : Singularity theory and it's applications  
年月, 場所 : 2003年9月, Japan (札幌コンベンションセンター)
3. 題名 : Bifurcations of general Clairaut type equations  
学会名 : 第6回北海道大学 - ソウル大学ジョイントシンポジウム  
年月, 場所 : 2003年10月, Korea (Seoul National University)
4. 題名 : Holonomic systems of general Clairaut type  
学会名 : The 1st Chinese-Japanese singularity theory working days  
年月, 場所 : 2004年6月, China (Northeast Normal University)
5. 題名 : Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type  
学会名 : International Conference on Differential Equations  
年月, 場所 : 2004年7月, Russia (Suzdal)
6. 題名 : Completely integrable first order ordinary differential equations  
学会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days IV  
年月, 場所 : 2004年9月, Polish (Bedlewo)
7. 題名 : On implicit second order ordinary differential equations  
学会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days V  
年月, 場所 : 2005年7月, Polish (Bukowina Tatrzańska)
8. 題名 : Singularities of smooth mappings with patterns  
学会名 : First South Pacific Conference on Mathematics  
年月, 場所 : 2005年8月, New Caledonia (Noumea)
9. 題名 : Second order ordinary differential equations of Clairaut type  
学会名 : Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities  
年月, 場所 : 2005年9月, Australia (Sydney University)

10. 題名 : A relationship between caustics and big wave front  
学会名 : Hayashibara forum on Singularities  
年月, 場所 : 2006年11月, France (IHES)
11. 題名 : Completely integrable implicit second order ordinary differential equations  
学会名 : Singularities Grand Sud  
年月, 場所 : 2006年11月, France (CIRM, Luminy)
12. 題名 : Existence and uniqueness for geometric solutions of implicit second order ordinary differential equations  
学会名 : 第9回北海道大学 - ソウル大学ジョイントシンポジウム  
年月, 場所 : 2007年2月, Japan (Hokkaido University)

## ● 国内シンポジウム

1. 題名 : Bifurcations of Clairaut type equations  
学会名 : シンポジウム「接触幾何, 特異点, 古典的微分幾何学」  
年月, 場所 : 2002年1月, 北海道大学教育大函館校
2. 題名 : Bifurcations of Clairaut type equations  
学会名 : 「日本数学会」  
年月, 場所 : 2002年3月, 明治大学駿河台校舎
3. 題名 : クレロー型方程式の分岐について  
学会名 : 「第49回トポロジーシンポジウム」  
年月, 場所 : 2002年7月, 沖縄青年会館
4. 題名 : The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space  
学会名 : 「シンプレクティック幾何とその周辺」  
年月, 場所 : 2002年10月, 秋田大学手形キャンパス地域共同センター
5. 題名 : The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space  
学会名 : 「実・複素特異点のトポロジー II」  
年月, 場所 : 2002年12月, 鹿児島大学郡元キャンパス
6. 題名 : Bifurcations of general Clairaut type equations  
学会名 : 「明日の特異点論」  
年月, 場所 : 2003年2月, 北海道大学
7. 題名 : 双曲空間内の超曲面について

学会名：「日本数学会」

年月, 場所：2003年3月, 東京大学駒場 キャンパス

8. 題名：一般クレロー型方程式について

学会名：「Symplectic Geometry とその周辺」

年月, 場所：2003年11月, 岐阜経済大学

9. 題名：Legendrian dualities and parallels of spacelike hypersurfaces  
in pseudo-spheres

学会名：「第13回沼津研究集会」

年月, 場所：2005年3月, 沼津高専

10. 題名：On implicit second order ordinary differential equations;  
Completely integrable and Clairaut type

学会名：「特異点における不変量」

年月, 場所：2005年6月, 近畿大学

11. 題名：On complete solutions and singular solutions of implicit  
second order ordinary differential equations

学会名：「測地線及び関連する諸問題」

年月, 場所：2006年1月, 熊本大学

12. 題名：On caustics and wavefronts

学会名：「特異点論-局所対大域」

年月, 場所：2006年6月, 山口大学

13. 題名：2階常微分方程式の完全解と完全特異点について

学会名：シンポジウム「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」

年月, 場所：2007年1月, 旭川ときわ市民ホール

14. 題名：2階常微分方程式に対する幾何学的解の存在と一意性

学会名：「第14回沼津研究集会」

年月, 場所：2007年3月, 沼津高専

## ● 教室セミナー

1. 題名：Bifurcations of Clairaut type

セミナー名：「特異点論セミナー」

年月, 場所：2001年12月, 北海道大学

2. 題名：Hyperbolic evolute and hyperbolic ridge point

セミナー名：「特異点論セミナー」  
年月,場所：2002年5月,北海道大学

3 . 題名：Curves and surfaces in Hyperbolic space

セミナー名：「幾何学コロキウム」  
年月,場所：2002年5月,北海道大学

4 . 題名：Evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space

セミナー名：「特異点論セミナー」  
年月,場所：2002年10月,北海道大学

5 . 題名：Bifurcations of general Clairaut type equations

セミナー名：「特異点論セミナー」  
年月,場所：2003年4月,北海道大学

6 . 題名：J. Mather の Right Equivalence について

セミナー名：「特異点論セミナー」  
年月,場所：2003年5月,北海道大学

7 . 題名：Completely integrable first order (ordinary) differential equations

セミナー名：「特異点論セミナー」  
年月,場所：2004年6月,北海道大学

8 . 題名：Completely integrable first order ordinary differential equations

セミナー名：「Geometry and Topology Seminar in Valencia University」  
年月,場所：2004年10月, Spain (Valencia University)

9 . 題名：Second order ordinary differential equations of Clairaut type

セミナー名：「特異点論セミナー」  
年月,場所：2005年4月,北海道大学

10 . 題名：Second order ordinary differential equations of Clairaut type

セミナー名：「IIASA Dynamical System Seminar」

年月,場所：2005年10月, Austria

(International Institute for Applied System Analysis)

11 . 題名：Horospherical Geometry of surfaces in hyperbolic space II:

horo-cyclic surfaces

セミナー名：「特異点論セミナー」

年月,場所：2006年6月,北海道大学

- 1 2 . 題名 : 2階常微分方程式に対する滑らかな完全解について  
セミナー名 : 「談話会」  
年月, 場所 : 2 0 0 6 年 7 月, 愛媛大学
- 1 3 . 題名 : Second order ordinary differential equations from the view points  
of differential geometry and singularity theory  
セミナー名 : 「Durham University Geometric Seminar」  
年月, 場所 : 2 0 0 6 年 1 0 月, Durham University
- 1 4 . 題名 : Completely integrable implicit second order  
ordinary differential equations  
セミナー名 : 「日本数学会北海道支部講演会」  
年月, 場所 : 2 0 0 6 年 1 2 月, 北海道大学