

研究内容・成果，及び，2005年度研究活動報告

● 研究内容・成果

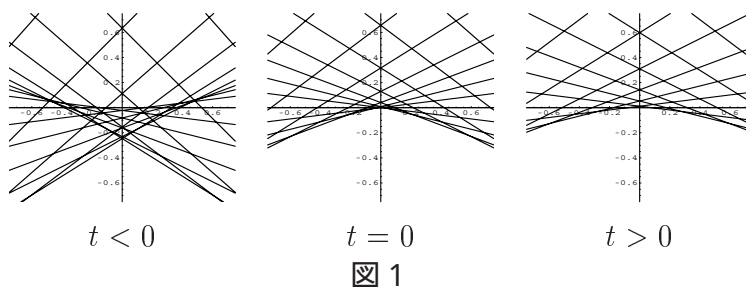
研究テーマは主に微分方程式への特異点論的研究と微分幾何学への特異点論的研究です．

微分方程式への特異点論的研究について

1．完全積分可能な微分方程式またはその分岐に対する分類問題

Implicit な 1 階常微分方程式 $F(x, y, p) = 0$ ($p = dy/dx$) に対して完全積分可能系の中で，解に特異点がない場合であるクレロー型方程式の分岐の分類問題を考えました．この方程式は解には特異点がないのですが，その特異解が完全解の包絡線となる幾何学的に美しい特徴を持っており，また特異解には特異点が現れます (図 1)．

1 階常微分方程式に対するクレロー型方程式の分岐の分類表には 2 つの関数モジュライと呼ばれる 2 組の無限次元パラメーターが現れることが分かりました．従来のような特異点の分類理論において 1 つの関数モジュライが現れる例はいくつか知られており，その幾何学的な意味を与えることが大きな問題としてありましたが，2 つの関数モジュライが現れる具体的な分類結果はこれが最初の発見です．図 1 は 2 つの関数モジュライを固定して描いた (x, y) 平面の解曲線の図です．この図から 4 ウェッジ構造の分岐が現れることが分かります．



さらに，一般の次元に対して 1 階偏微分方程式系 (Holonomic system) を考え，その中でクレロー型方程式を拡張した一般型クレロー方程式の分類問題を考察しました．従来は方程式 $F = 0$ に対して $F^{-1}(0)$ が部分多様体となるように仮定をつけ，はめ込みの像として考えますが，一般型クレロー型方程式は解は古典解であるけど方程式の曲面には特異点があってもよい場合，つまり写像の像として現される一般的な場合を考えました．ルネ・トムの横断性定理を応用することにより分類を完成させました．

また上述の一般型クレロー方程式の分岐の分類も与えました．この分岐の分類表の中には古典的に知られているラグランジュの常微分方程式が現れることや，クロスキャップ特異点を持つ方程式の衝突の様子の記事等一般次元を含めてクレロー型及びその一般化の微分方程式と分岐の分類問題をほぼ完全に解決しました．

その後，より一般的な完全積分可能な 1 階常微分方程式の分類も行いました．この場合は解自体も特異点を持つ場合を含み，クレロー型の場合と比較すると本質的に難しい考察が必要と

なります。

2. 完全積分可能な微分方程式の特異性

2階常微分方程式に対して(幾何学的)解の存在性とその性質を考えました。特に解が滑らかな(古典解)となり、方程式の曲面が古典解の2パラメータ族として与えられる場合、つまり滑らかな完全解が存在する必要十分条件を与えました。その為に2階常微分方程式に対してクレロー型方程式を導入し、その性質を調べました。また Engel-Legendre 変換に対する双対方程式が完全積分可能となる必要十分条件も与えました。

さらに最近、より一般的な条件の下、2階常微分方程式に対して、完全積分可能になるための条件と完全特異解を持つための条件を与えました。

微分幾何への特異点論的研究について

1. ミンコフスキー空間内の部分多様体の幾何学的性質

部分多様体の幾何学的性質を関数の特異点論やルジャンドル・ラグランジュ特異点論を応用して研究しました。

特に双曲空間内の空間的超曲面に対してラグランジュ特異点論を応用して縮平面(焦面)の特異点から元の超曲面の微分幾何学的性質を研究し、縮平面を従来の双曲空間内だけで考えるのではなくさらに、ド・シッター空間まで定義を拡張する必要があることなど発見しました。縮平面が同値になる条件をラグランジュ特異点論を用いることにより、代数的条件(ある次元と写像の計算)と幾何学的条件(ある葉層との接触)の2つの立場から求めました。

またルジャンドル特異点論を用いることにより双曲空間内の全臍的超曲面で独自のものであるホ口球面に余次元が高い部分多様体が含まれることとの差を記述する新たな不変量を発見しました。さらに2つの曲面がホ口球面に同じ接触をする為の必要十分条件を自然に導入される高さ関数が同値となることを示しました。

3つの擬球面(双曲空間、ド・シッター空間、光錐)に対してルジャンドル双対性が成り立ちます。このことから特に光錐内の空間的超曲面に対して微分幾何学を考察することができ、統一的に平行曲面や焦面を扱えることが分かりました。対応するラグランジュはめ込みとルジャンドルはめ込みの母関数族の対応から安定性の下で平行曲面と焦面の関係を与えました。

さらに3次元ミンコフスキー空間内の空間的結び目を考えました。空間的結び目なので通常のユークリッド空間内の結び目と射影した2次元の結び目の中間に当たるようなものです。その結果3次元ミンコフスキー空間内の空間的結び目が通常のユークリッド空間内の結び目理論に正則イソトピーだけ差があるという今まで知られていなかった事実を発見しました。

2. 特異点を持つ模様つき多様体

特異点を持つ模様つき多様体の分類問題を考えました。従来、模様つき多様体は多様体上の葉層構造として考えられていますが、多様体ではなく特異点を持つ多様体(variety)の場合を考えました。これをある種の発散関式として定式化します。特に、特異点を持つ模様つき曲面の場合、多重横断性定理を用いることによりジェネリックな分類を得ることが出来ました。図

2は模様つき曲面のジェネリックな分類表に現れる図を描いたものです．これは局所的な図の
 ですが大域的にはこれらを張り合わせたものとなります．また，右上のクロスキャップ特異点
 と右下の3重点の分類表には関数モジュライが1つ現れます．

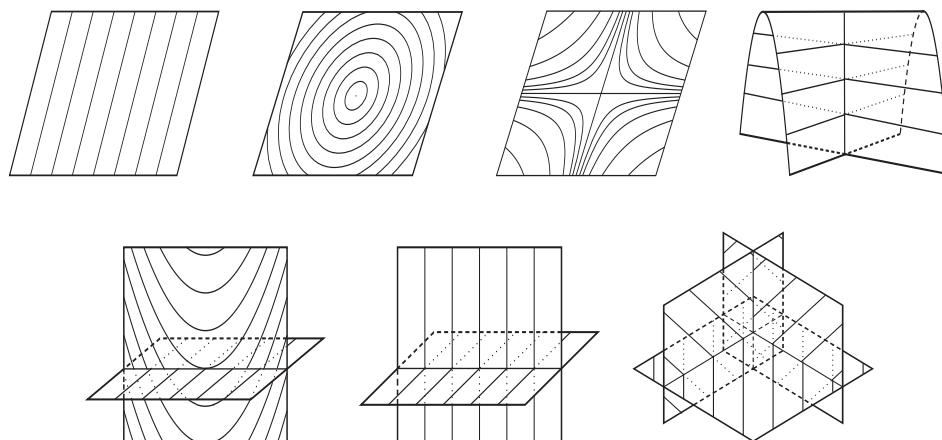


図 2

● 2005年度研究活動報告

発表論文

[1]

題名 : Holonomic systems of general Clairaut type

雑誌名 : Hokkaido Mathematical Journal

年, 号, ページ : 2005, 34, 247–263

[2] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)

題名 : The horospherical geometry of Submanifolds in Hyperbolic space

雑誌名 : Journal of the London Mathematical Society

年, 号, ページ : 2005, 71, 779–800

[3] (with S. Izumiya, M. Kikuchi)

題名 : Global properties of spacelike curves in Minkowski 3-space

: accepted, to appear in Journal of Knot theory and its Ramifications

[4]

題名 : Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type

: accepted, to appear in Hokkaido Mathematical Journal

口頭発表

1 .

題名 : Second order ordinary differential equations of Clairaut type

セミナー名 : 「特異点論セミナー」

年月, 場所 : 2005年4月, 北海道大学

2 .

題名 : On implicit second order ordinary differential equations;

Completely integrable and Clairaut type

学会名 : 「特異点における不変量」

年月, 場所 : 2005年6月, 近畿大学

3 .

題名 : On implicit second order ordinary differential equations

学会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days V

年月, 場所 : 2005年7月, Polish (Bukowina Tatrzańska)

4 .

題名 : Singularities of smooth mappings with patterns

学会名 : First South Pacific Conference on Mathematics

年月, 場所 : 2005年8月, New Caledonia (Noumea)

5 .

題名 : Second order ordinary differential equations of Clairaut type

学会名 : Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities

年月, 場所 : 2005年9月, Australia (Sydney University)

6 .

題名 : Second order ordinary differential equations of Clairaut type

セミナー名 : 「IIASA Dynamical System Seminar」

年月, 場所 : 2005年10月, Austria (International Institute for Applied System Analysis)

7 .

題名 : On complete solutions and singular solutions of implicit second order ordinary differential equations

学会名 : 「測地線及び関連する諸問題」

年月, 場所 : 2006年1月, 熊本大学教育学部

発表論文リスト

[1]

題名 : Bifurcations of ordinary differential equations of Clairaut type

雑誌名 : Journal of Differential Equations

年, 号, ページ : 2003, 190, 579–599

[2] (with S. Izumiya, D. Pei)

題名 : Curves and Surfaces in Hyperbolic space

雑誌名 : Banach Center Publications. Geometric Singularity Theory

年, 号, ページ : 2004, 65, 107–123

[3] (with S. Izumiya, D. Pei)

題名 : Singularities of evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space

雑誌名 : Proceedings of Edinburgh Mathematical Society

年, 号, ページ : 2004, 47, 131–153

[4] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)

題名 : On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2
in Hyperbolic n -space

雑誌名 : Bulletin of Brazilian Mathematica Society

年, 号, ページ : 2004, 35, 177–198

[5]

題名 : Holonomic systems of general Clairaut type

雑誌名 : Hokkaido Mathematical Journal

年, 号, ページ : 2005, 34, 247–263

[6] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)

題名 : The horospherical geometry of Submanifolds in Hyperbolic space

雑誌名 : Journal of the London Mathematical Society

年, 号, ページ : 2005, 71, 779–800

[7] (with S. Izumiya, M. Kikuchi)

題名 : Global properties of spacelike curves in Minkowski 3-space

: accepted, to appear in Journal of Knot theory and its Ramifications

[8]

題名 : Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type

: accepted, to appear in Hokkaido Mathematical Journal

[9]

題名 : Bifurcations of completely integrable first order ordinary
differential equations
: 投稿中, preprint, submitted

[10]

題名 : On implicit second order ordinary differential equations:
Completely integrable and Clairaut type
: 投稿中 , preprint, submitted

[11] (with K. Saji)

題名 : Singularities of smooth mappings with patterns
: 投稿中 , preprint, submitted

[12] (with S. Izumiya)

題名 : Spacelike Parallel and Evolutes in Minkowski pseudo-spheres
: 投稿中 , preprint, submitted

[13] (with Y. Machida)

題名 : Classifications of implicit second order ordinary differential equations
of Clairaut type
: preprint

[14]

題名 : On complete solutions and complete singular solutions of second order
ordinary differential equations
: preprint

主たる口頭発表のリスト

● 国際シンポジウム

1.

題名 : The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space

学会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days II

年月, 場所 : 2002年9月, Polish (Bedlewo)

2.

題名 : Bifurcations of general Clairaut type equations

学会名 : Singularity theory and its applications

年月, 場所 : 2003年9月, Japan (札幌コンベンションセンター)

3.

題名 : Bifurcations of general Clairaut type equations

学会名 : 第6回北海道大学 - ソウル大学ジョイントシンポジウム

年月, 場所 : 2003年10月, Korea (Seoul National University)

4.

題名 : Holonomic systems of general Clairaut type

学会名 : The 1st Chinese-Japanese singularity theory working days

年月, 場所 : 2004年6月, China (Northeast Normal University)

5.

題名 : Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type

学会名 : International Conference on Differential Equations

年月, 場所 : 2004年7月, Russia (Suzdal)

6.

題名 : Completely integrable first order ordinary differential equations

学会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days IV

年月, 場所 : 2004年9月, Polish (Bedlewo)

7.

題名 : On implicit second order ordinary differential equations

学会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days V

年月, 場所 : 2005年7月, Polish (Bukowina Tatrzańska)

8.

題名 : Singularities of smooth mappings with patterns
学会名 : First South Pacific Conference on Mathematics
年月, 場所 : 2005年8月, New Caledonia (Noumea)

9.

題名 : Second order ordinary differential equations of Clairaut type
学会名 : Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities
年月, 場所 : 2005年9月, Australia (Sydney University)

● 国内シンポジウム

1.

題名 : Bifurcations of Clairaut type equations
学会名 : シンポジウム「接触幾何, 特異点, 古典的微分幾何学」
年月, 場所 : 2002年1月, 北海道大学教育大函館校

2.

題名 : Bifurcations of Clairaut type equations
学会名 : 「日本数学会」
年月, 場所 : 2002年3月, 明治大学駿河台校舎

3.

題名 : クレロー型方程式の分岐について
学会名 : 「第49回トポロジーシンポジウム」
年月, 場所 : 2002年7月, 沖縄青年会館

4.

題名 : The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space
学会名 : 「シンプレクティック幾何とその周辺」
年月, 場所 : 2002年10月, 秋田大学手形キャンパス地域共同センター

5.

題名 : The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space
学会名 : 「実・複素特異点のトポロジー II」
年月, 場所 : 2002年12月, 鹿児島大学郡元キャンパス

6.

題名 : Bifurcations of general Clairaut type equations
学会名 : 「明日の特異点論」
年月, 場所 : 2003年2月, 北海道大学

7.

題名：双曲空間内の超曲面について

学会名：「日本数学会」

年月,場所：2003年3月, 東京大学駒場 キャンパス

8.

題名：一般クレロー型方程式について

学会名：「Symplectic Geometry とその周辺」

年月,場所：2003年11月, 岐阜経済大学

9.

題名：Legendrian dualities and parallels of spacelike hypersurfaces
in pseudo-spheres

学会名：「第13回沼津研究集会」

年月,場所：2005年3月, 沼津高専

10.

題名：On implicit second order ordinary differential equations;
Completely integrable and Clairaut type

学会名：「特異点における不変量」

年月,場所：2005年6月, 近畿大学

11.

題名：On complete solutions and singular solutions of implicit second order
ordinary differential equations

学会名：「測地線及び関連する諸問題」

年月,場所：2006年1月, 熊本大学教育学部

● 教室セミナー

1.

題名：Bifurcations of Clairaut type

セミナー名：「特異点論セミナー」

年月,場所：2001年12月, 北海道大学

2.

題名：Hyperbolic evolute and hyperbolic ridge point

セミナー名：「特異点論セミナー」

年月,場所：2002年5月, 北海道大学

3 .

題名 : Curves and surfaces in Hyperbolic space

セミナー名 : 「幾何学コロキウム」

年月, 場所 : 2002年5月, 北海道大学

4 .

題名 : Evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space

セミナー名 : 「特異点論セミナー」

年月, 場所 : 2002年10月, 北海道大学

5 .

題名 : Bifurcations of general Clairaut type equations

セミナー名 : 「特異点論セミナー」

年月, 場所 : 2003年4月, 北海道大学

6 .

題名 : J. Mather の Right Equivalence について

セミナー名 : 「特異点論セミナー」

年月, 場所 : 2003年5月, 北海道大学

7 .

題名 : Completely integrable first order (ordinary) differential equations

セミナー名 : 「特異点論セミナー」

年月, 場所 : 2004年6月, 北海道大学

8 .

題名 : Completely integrable first order ordinary differential equations

セミナー名 : 「Geometry and Topology Seminar in Valencia University」

年月, 場所 : 2004年10月, Spain (Valencia University)

9 .

題名 : Second order ordinary differential equations of Clairaut type

セミナー名 : 「特異点論セミナー」

年月, 場所 : 2005年4月, 北海道大学

10 .

題名 : Second order ordinary differential equations of Clairaut type

セミナー名 : 「IIASA Dynamical System Seminar」

年月, 場所 : 2005年10月, Austria (International Institute for Applied System Analysis)