

# 研究内容・成果，及び，2004年度研究活動報告

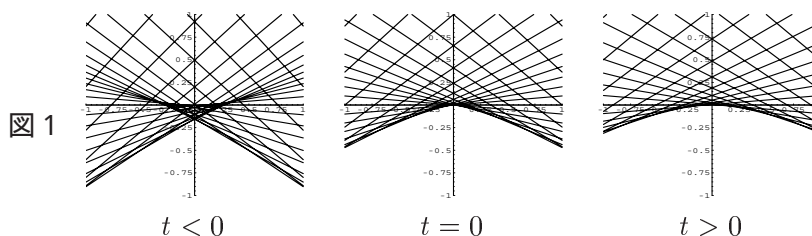
## 研究内容・成果

研究テーマは主に微分方程式への特異点論的研究と微分幾何学への特異点論的研究です。

### 微分方程式への特異点論的研究について

完全積分可能な微分方程式に対して，方程式の性質や分類問題に興味があります．古典的な1階常微分方程式の1つとしてクレロー方程式 ( $y' = px + f(p)$ ,  $p = dy/dx$ ) があります．クレロー方程式は完全積分可能な方程式で特異解が一般解の包絡線によって表されるという特徴的な性質を持っており，美しい相図 (一般解と特異解) が描けます．このクレロー方程式の一般化としてクレロー型方程式が考えられます．クレロー型方程式は完全積分可能で一般解が微分可能である方程式として定義します．つまり，解曲面が古典的解で敷き詰められるという条件です．クレロー型方程式は自然な同値関係 (点変換) のもとでジェネリックに分類されており，分類の1つに1つの関数族に依存して異なるものが現れる標準形 (1つの関数モジュライ) が現れることが知られています．

次の問題として時間パラメーターによってクレロー型方程式または相図がどのように分岐するかを調べました．1パラメータークレロー型方程式を考え，パラメーターを止めるごとにクレロー型方程式として同値であるような自然な同値関係を考えます．1パラメータークレロー型方程式を分類する為にこの方程式に付随して作られるルジャンドルはめ込み芽を考え，ルジャンドル特異点論における母関数族の理論と開折理論の応用により，母関数族を分類することができ，対応する1パラメータークレロー型方程式をジェネリックに分類することが出来ます．この分類の中には1つの関数モジュライが現れるタイプと2つの関数モジュライが現れるタイプがあり，これらを含め全部で4つの標準形が得られます．その結果，1つの標準形に4ウェブ構造の分岐 (図1) が現れることが分かりました．



通常，仮定として方程式の変数の集合が部分多様体 (解曲面) になるもの，はめ込みで径数付けられるものを考えますが，この集合が特異点を許容したもの，写像で径数付けられるものも考えられます．この場合より一般的なクレロー型方程式を考えることができます．

また常微分方程式ではなく偏微分方程式に対しても方程式系 (Holonomic systems) を考えることによりクレロー型方程式あるいは一般クレロー方程式を自然に拡張でき上述の母関数族の理論と開折理論の他にジェット横断性定理を応用することによりジェネリックな分類を行うことができます．

この系として常微分方程式に対する一般クレロー型方程式の分岐の分類が1パラメータークレロー型方程式の4つの標準形の他にさらに3つの標準形が現れ，3つの標準形のうち2つに

対して新たな関数モジュライが出てくることが分かりました．図2は3つの標準形のうち新たに現れた分岐に対する相図を描いたものです．

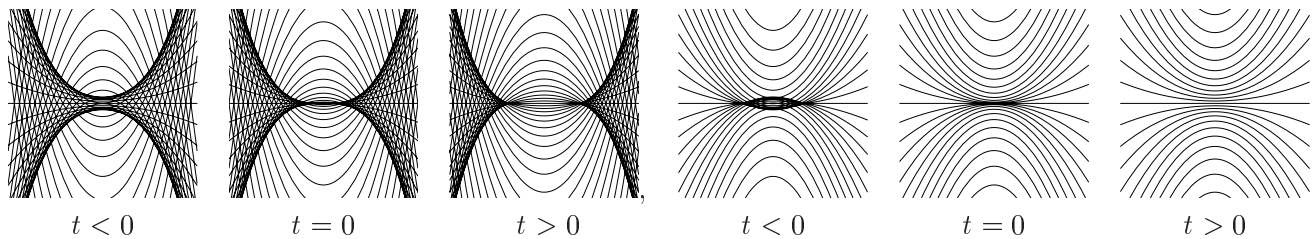


図2

さらに解曲面が部分多様体となる条件の下でクレロー型方程式という条件を付けない場合，つまり完全積分可能な常微分方程式の分岐に対して，ジェネリック分類を得ることが出来ました．この場合，新たに4つの分岐する標準形が現れることが分かりました．

### 微分幾何への特異点論的研究について

ローレンツ微分幾何学の特異点論的考察としてミンコフスキー空間内の双曲モデルの部分多様体に対して研究しました．従来，双曲空間の部分多様体を研究する場合，ポアンカレ球モデルを使い微分幾何を研究する方法がありますが計算が大変です．そこでユークリッド空間における高さ関数や距離2乗関数に対応する概念を導入して双曲空間内の部分多様体の微分幾何を研究しました．

特に，ホ口球的高さ関数を定義することにより双曲空間内の特徴的な曲面であるホ口球と曲線や曲面との接触を考え，空間曲線から定義されるホ口球的曲面の性質を研究しました．

具体的にはルジャンドル特異点論を応用することにより，ホ口球的曲面がホ口球の高さ関数の波面になることが分かるので空間曲線から定まる管状曲面とホ口球的曲面が同じ接触をもつ必要十分条件を与えました．

また，余次元が高い部分多様体に対しては管状超曲面を使うことによって統一的な研究を行い，特徴的な曲面との接触の様子などを調べました．

一方，双曲空間内の超曲面に対しユークリッド空間の場合と同様に縮閉線を定義されます．縮閉線は2つに分解することができ，1つは双曲空間内にもう1つはドシッター空間内に現れることが分かります．この事実はポアンカレ球モデルを考えていると単に無限遠点として理解され，ミンコフスキーモデルを採用することにより初めて認識することが出来ます．

特に曲面に対して，以上のこととラグランジュ特異点論における母関数族の分類を応用すると曲面上の(特異)葉層構造を分類することができ，その様子をコンピューターを用いることにより視覚化することができます．この場合，縮閉線のほうは一般に図に描くことが難しいですが葉層構造の方は図を描くことが簡単ですので，この結果から図を描くことにより縮閉線を判定することができます．

現在，3つの擬球面(双曲空間，ドシッター空間，光錐)内の空間的曲面に対して平行曲面などを統一的に定義し研究を進めています．

発表論文

- [1] (with S. Izumiya, D. Pei)  
“Curves and Surfaces in Hyperbolic space”  
*Banach Center Publications. Geometric Singularity Theory.* 2004. **65**. pp107–123.
- [2] (with S. Izumiya, D. Pei)  
“Singularities of evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space”  
*Proceedings of Edinburgh Mathematical Society.* 2004. **47**. pp131–153.
- [3] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)  
“On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2 in Hyperbolic  $n$ -space”  
*Bulletin of Brazilian Mathematica Society.* 2004. **35**(2). pp177–198.
- [4] “Holonomic systems of general Clairaut type”  
to appear in *Hokkaido Mathematical Journal*
- [5] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)  
“The horospherical geometry of Submanifolds in Hyperbolic space”  
to appear in *Proceedings of the London Mathematical Society*

口頭発表

1. 2004年6月 “Holonomic systems of general Clairaut type”  
「*The 1st Chinese-Japanese singularity theory working days*」  
China (Northeast Normal University)
2. 2004年6月 “Completely integrable first order (ordinary) differential equations”  
「特異点論セミナー」北海道大学
3. 2004年7月 “Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type”  
「*International Conference on Differential Equations*」Russia (Suzdal)
4. 2004年9月 “Completely integrable first order ordinary differential equations”  
「*Polish-Japanese Singularity Theory Working Days IV*」Polish (Bedlewo)
5. 2004年10月 “Completely integrable first order ordinary differential equations”  
「Geometry and Topology Seminar in Valencia University」Spain (Valencia University)

# 発表論文リスト

- [1] “Bifurcations of ordinary differential equations of Clairaut type”  
*Journal of Differential Equations*. 2003. **190**. pp578–599.
  
- [2] (with S. Izumiya, D. Pei)  
“Curves and Surfaces in Hyperbolic space”  
*Banach Center Publications. Geometric Singularity Theory*. 2004. **65**. pp107–123.
  
- [3] (with S. Izumiya, D. Pei)  
“Singularities of evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space”  
*Proceedings of Edinburgh Mathematical Society*. 2004. **47**. pp131–153.
  
- [4] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)  
“On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2 in Hyperbolic  $n$ -space”  
*Bulletin of Brazilian Mathematica Society*. 2004. **35**(2). pp177–198.
  
- [5] “Holonomic systems of general Clairaut type”  
to appear in *Hokkaido Mathematical Journal*
  
- [6] (with S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero-Fuster)  
“The horospherical geometry of Submanifolds in Hyperbolic space”  
to appear in *Proceedings of the London Mathematical Society*
  
- [7] “Bifurcations of general Clairaut type equations”  
preprint, submitted (2003)
  
- [8] “Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type”  
preprint, submitted (2005)
  
- [9] “Bifurcations of completely integrable first order ordinary differential equations”  
preprint, submitted (2005)
  
- [10] “On implicit second order ordinary differential equations; Completely integrable and Clairaut type” preprint (2005)

# 主たる口頭発表のリスト

## 海外

1. 2002年9月 “The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space”  
「*Polish-Japanese Singularity Theory Working Days II*」 Polish (Bedlewo)
2. 2003年10月 “Bifurcations of general Clairaut type equations”  
「第6回北海道大学 - ソウル大学ジョイントシンポジウム」 Korea (Seoul National University)
3. 2004年6月 “Holonomic systems of general Clairaut type”  
「*The 1st Chinese-Japanese singularity theory working days*」  
China (Northeast Normal University)
4. 2004年7月 “Bifurcations of holonomic systems of general Clairaut type”  
「*International Conference on Differential Equations*」 Russia (Suzdal)
5. 2004年9月 “Completely integrable first order ordinary differential equations”  
「*Polish-Japanese Singularity Theory Working Days IV*」 Polish (Bedlewo)

## 国内

1. 2002年1月 “Bifurcations of Clairaut type equations”  
シンポジウム「接触幾何，特異点，古典的微分幾何学」北海道大学教育大函館校
2. 2002年3月 “Bifurcations of Clairaut type equations”  
「日本数学会」明治大学駿河台校舎
3. 2002年7月 “クレロー型方程式の分岐について”  
「第49回トポロジーシンポジウム」沖縄青年会館
4. 2002年10月 “The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space”  
「シンプレクティック幾何とその周辺」秋田大学手形キャンパス地域共同センター
5. 2002年12月 “The geometry of hypersurfaces in Hyperbolic space”  
「実・複素特異点のトポロジー」鹿児島大学郡元キャンパス
6. 2003年2月 “Bifurcations of general Clairaut type equations”  
「明日の特異点論」北海道大学
7. 2003年3月 “双曲空間内の超曲面について”  
「日本数学会」東京大学駒場 キャンパス
8. 2003年9月 “Bifurcations of general Clairaut type equations”  
「Singularity theory and it's applications」札幌コンベンションセンター
9. 2003年11月 “一般クレロー型方程式について”  
「Symplectic Geometry とその周辺」岐阜経済大学

## 教室セミナー

1. 2001年12月 “Bifurcations of Clairaut type”  
「特異点論セミナー」北海道大学

- 2 . 2 0 0 2 年 5 月 “Hyperbolic evolute and hyperbolic ridge point”  
「特異点論セミナー」北海道大学
- 3 . 2 0 0 2 年 5 月 “Curves and surfaces in Hyperbolic space”  
「幾何学コロキウム」北海道大学
- 4 . 2 0 0 2 年 1 0 月 “Evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space”  
「特異点論セミナー」北海道大学
- 5 . 2 0 0 3 年 4 月 “Bifurcations of general Clairaut type equations”  
「特異点論セミナー」北海道大学
- 6 . 2 0 0 3 年 5 月 “J. Mather の Right Equivalence について”  
「特異点論セミナー」北海道大学
- 7 . 2 0 0 4 年 6 月 “Completely integrable first order (ordinary) differential equations”  
「特異点論セミナー」北海道大学
- 8 . 2 0 0 4 年 1 0 月 “Completely integrable first order ordinary differential equations”  
「Geometry and Topology Seminar in Valencia University」 Spain (Valencia University)