

研究内容・成果，及び，2005年度研究活動報告

北海道大学大学院理学研究科 学術支援研究員 (COE) 島倉裕樹

1 研究内容・成果

頂点作用素代数の自己同型群として散在型有限単純群などの興味深い有限群を捉え，対称性を研究し理解することを目的としている．頂点作用素代数にはしばしば離散的な対象物である格子，符号，グラフ等との関連が現れることを利用して効率的に研究を進めている．今年度は次の3つのテーマに対して研究を行った．

1.1 一般の偶格子 L に付随する頂点作用素代数 V_L^+ の自己同型群の決定

一般に頂点作用素代数と自己同型群が与えられたときに，その固定点の集合全体は軌道体模型と呼ばれる部分頂点作用素代数をなす．そして，軌道体模型の一般論を構築することは重要であるが，非常に難しく未だに多くの問題が残されている．

軌道体模型の典型的な例として V_L^+ がある．これは偶格子 L に付随する頂点作用素代数 V_L において，格子の自己同型 -1 から誘導される位数 2 の自己同型の固定点として得られる頂点作用素代数である．近年 V_L^+ の表現論については完成されたが，自己同型群はいくつかの例に対して計算されているだけであり一般論の構築が望まれている状況であった．本年度は筆者が過去に行った格子がノルム 2 の元を持たない場合の自己同型群の決定方法を一般の偶格子にまで対して拡張した．特に，どのような格子 L に対して V_L^+ の自己同型群が V_L の自己同型から誘導されない元を持つかを完全に記述し，軌道体模型を考えることによりどのように対称性が広がるかを明確に説明した．また，その過程の中で構成法 B と呼ばれる符号から格子を作る方法で得られる偶格子の特徴づけを V_L^+ の対称性の視点から与えており，頂点作用素代数から組み合わせ論への一つの応用を得たことになる．

これらの研究成果は (c) で口頭発表されており，また論文 (1) にまとめられている．

1.2 単純カレント拡大における自己同型の持ち上げについて

既知の頂点作用素代数から新しい頂点作用素代数を得る典型的な方法として単純カレント拡大がある．これは頂点作用素代数に単純カレントと呼ばれる性質の良い加群を加えて，その上に頂点作用素代数構造を入れるものがある．例えば有名な μ -ーンシャイン頂点作用素代数 V^μ もリーチ格子 Λ に付随する頂点作用素代数 V_Λ^+ の単純カレント拡大として構成されている．こうして得られた頂点作用素代数は非常に大きい対称性を持つ可能性を秘めており，自己同型群の研究対象として重要である．

筆者は単純カレント拡大の自己同型群の中で，元の頂点作用素代数の自己同型から誘導される部分群はどのようなものかを完全に記述した．さらなる一般化として，元の頂点作用素代数の自己同型から誘導される単純カレント拡大の間の同型写像の構成も行った．

この結果の応用として次の2つの結果を得た．一つは頂点作用素代数 $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ と $V_{\Lambda_{16}}^+$ の単純カレント拡大の同型類を完全に決定である．ただし $\sqrt{2}E_8$ は E_8 型のルート格子のノルムを $\sqrt{2}$ 倍して得られる格子であり， Λ_{16} は階数が 16 の Barnes-Wall 格子である．これら頂点作用素代数は直交群に付随する大きな自己同型を持つことが示されており，その対称性を用い問題を解決した．もう一つはモンスターにおける基本可換 2-群の正規化群

の記述である。 V^{\natural} を V_L^+ の単純カレント拡大として記述して、 V_L^+ の自己同型を用いて基本可換 2-群の正規化群の記述を行った。特に 7 つの極大 2-局所部分群のうち 5 つはこの方法で記述される。そして、このようにして得られたいくつかの群がモンスターアマルガムを成す事を、これらの記述を用いて行った。このことから V^{\natural} にグライスが構成した可換代数が含まれていることを用いずにモンスターが作用することがわかる。

これらの研究成果は (d) で口頭発表されている。

1.3 グライス代数と有限可換自己同型群に付随するグラフ

頂点作用素代数が CFT 型であり、次数 1 の空間が 0 である場合に、次数 2 の空間にグライス代数と呼ばれる可換非結合代数構造を頂点作用素代数の積を用いて入れることができる。ムーンシャイン頂点作用素代数に代表されるように、”良い”有限単純群が全自己同型群としてあられる場合はこのような構造を持つ場合が多いと考えられており、重要な研究対象である。このグライス代数は有限次元ではあるが、非結合的な代数構造を持つために非常に複雑である。頂点作用素代数の自己同型群はこのグライス代数に作用するのだが、その複雑さゆえにこの作用を用いて自己同型群の構造を決めるのは一般には困難である。筆者は頂点作用素代数の有限可換自己同型に付随したグラフ構造をグライス代数上に定義し、いくつかの例に対して性質の良いグラフが現われることを示した。さらに、その作用を用いることで頂点作用素代数の自己同型群の構造がわかる場合がある。実際に、リー型の単純群 $E_6(2)$ が作用すると予想されていた階数 32 の Barnes-Wall 格子に付随する頂点作用素代数について応用でき、この手法を用いて予想を解決した。

これら研究成果は (a), (b) で口頭発表されている。

2 2005 年度の研究活動報告

発表論文

- (1) H. Shimakura, The automorphism groups of the vertex operator algebras V_L^+ : general case, *math. Z.* **252** (2006), 849 - 862.

口頭発表

- (a) H. Shimakura, Graph associated with the Griess algebra and an abelian automorphism group, Finite groups and vertex operator algebra, National Cheng Kung University, February 2006.
- (b) H. Shimakura, Automorphism group of the VOA associated with the Barnes-Wall lattice of rank 32, Vertex algebras in Nara, 奈良女子大, November 2005.
- (c) 島倉裕樹, 頂点作用素代数 V_L^+ と構成法 B で得られる偶格子, 代数的組み合わせ論とその周辺, 京都数理解析研究所, October 2005.
- (d) 島倉裕樹, 直交群が作用する VOA の拡大について, 第 17 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, September 2005.

発表論文リスト

- H. Shimakura, Lifts of automorphisms of VOAs in simple current extensions, in preparation.
- H. Shimakura, The automorphism groups of the vertex operator algebras V_L^+ : general case, *math. Z.* **252** (2006), 849 - 862.
- H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.
- H. Shimakura, Decompositions of the Moonshine module with respect to subVOAs associated to codes over \mathbf{Z}_{2k} , *J. Algebra* **251** (2002) 308-322.

主たる口頭発表のリスト

- H. Shimakura, Graph associated with the Griess algebra and an abelian automorphism group, Finite groups and vertex operator algebra, National Cheng Kung University, February 2006.
- H. Shimakura, Automorphism group of the VOA associated with the Barnes-Wall lattice of rank 32, Vertex algebras in Nara, 奈良女子大, November 2005.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数 V_L^+ と構成法 B で得られる偶格子, 代数的組み合わせ論とその周辺, 京都数理解析研究所, October 2005.
- 島倉裕樹, 直交群が作用する VOA の拡大について, 第 17 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, September 2005.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数 V_L^+ とモンスターの極大 2-局所部分群について, 代数的組み合わせ論, 京都大学数理解析研究所, December 2004.
- H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ and maximal 2-local subgroups of the Monster, Perspectives arising from vertex algebra theory, Senri Life Science Center, November 2004.
- 島倉裕樹, 構成法 B で得られる偶格子と頂点作用素代数, 第 16 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, August 2004.
- H. Shimakura, Y -representation and 21-node system of the Monster and the moonshine module, Amalgams for Graphs and Geometries, Oberwolfach, May 2004.
- H. Shimakura, Automorphism group of a vertex operator algebra fixed by an abelian group and its application, The Second East Asian Conference on Algebra and Combinatorics, 九州大学国際研究交流プラザ, November 2003.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数 V_L^+ の自己同型群, 第 15 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, July 2003.
- 島倉裕樹, 頂点作用素代数 V_L^+ の自己同型群, Lie Theory のひろがりとなつた進展, 京都大学数理解析研究所, July 2003.
- 島倉裕樹, Automorphism group of the vertex operator algebra associated to the Barnes-Wall lattice of rank 16, 日本数学会, 東京大学, March 2003.
- 島倉裕樹, Notes on the McKay-Thompson series for $2A$, $2B$ and $4A$, 第 14 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, August 2002.
- 島倉裕樹, $4A$ 元に関する McKay-Thompson 級数の計算, 代数学と計算, 東京都立大学, November 2001.
- 島倉裕樹, Moonshine module and codes over $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, 符号・格子・頂点作用素代数と有限群, 京都大学数理解析研究所, February 2001.

- 島倉裕樹, The calculation of the McKay-Thompson series for a $4A$ element of the Monster based on a new frame, 頂点作用素代数の表現論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, October 2000.