研究業績

1. 研究内容

1949 年に Arne Beurling はヒルベルト空間上の (作用素一つに対する) 作用素論と一変数関数論とを結びつける重要な定理を証明しました．この Beurling の定理により多くの作用素の構造が解明されることとなりました．一方，複数個の作用素を同時に解析するには多変数関数論的な困難が生じます．その一つの原因は多変数における Beurling の定理がわかっていないことにあります．

私の研究では複素多変数ハーディ空間とその上の作用素を扱います．特に，N 次元複素空間 $\mathbb{C}^N$ 内の単位多重円板 $\mathbb{D}^N$ 上で正則，その特殊境界で二乗可積分な関数全体からなるハーディ空間 $H^2(\mathbb{D}^N)$ を主な舞台とします．$H^2(\mathbb{D}^N)$ の変数を $z_1, \ldots, z_N$ とし通常の複素係数多項式環を $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ とします．$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ の中の多項式を掛ける作用で不変な $H^2(\mathbb{D}^N)$ の閉部分空間は Hardy submodule, または不変部分空間とよばれます．

$N = 1$ における Hardy submodule の特徴付けが Beurling の定理です．N が 2 以上のとき，Beurling の定理そのままの拡張はできないことが多くの研究者によって指摘されています．私の研究では多変数における Beurling の定理を得ることを目標にしています．

2. 現在までの主要な成果

(i) 作用素 V_{z_1}, V_{z_2} に関する中路の定理の一般化

二変数ハーディ空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ において，単項式 z_1, z_2 を Hardy submodule 上で掛ける作用素をそれぞれ V_{z_1}, V_{z_2} と書くことにします．この二つの作用素に対して $V_{z_1}^* V_{z_2} - V_{z_2} V_{z_1}^* = 0$ という条件を仮定すると Hardy submodule が完全に決定されることが Mandrekar と中路によって独立に示されています．[2] [1] では中路の定理を一般の多変数に拡張しました．

(ii) V_{z_1}, V_{z_2} により生成される C*-環に関する Berger-Coburn-Lebow の問題への解答

[2] で考えた $V_{z_1}^* V_{z_2} - V_{z_2} V_{z_1}^* = 0$ という仮定は極めて強いものです．そこで一般的な Hardy submodule を扱うために V_{z_1} と V_{z_2} で生成される C*-環 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ を考えます．この C*-環 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ について次の Berger-Coburn-Lebow によって提出された問題が未解決問題として知られていました．

Berger-Coburn-Lebow の問題　余次元有限な Hardy submodule $\mathcal{M}$ から定まる C*-環 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ は全てユニタリ同型か？

[3] の中でこの問題に肯定的な完全解答を与えました．この結果は以下の図式が可換になる

[1] [ ] の中の数字は論文リストと対応しています．

という言葉により表すことができます:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{K}(H^2) & \xrightarrow{i_{H^2}} & \mathcal{A}(H^2) & \xrightarrow{\pi_{H^2}} & \mathcal{A}(H^2)/\mathcal{K}(H^2) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & \Big\downarrow \mathbf{Ad}\ U|_{\mathcal{K}(H^2)} & & \Big\downarrow \mathbf{Ad}\ U & & \Big\downarrow \Phi & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathcal{M}) & \xrightarrow[i_{\mathcal{M}}]{} & \mathcal{A}(\mathcal{M}) & \xrightarrow[\pi_{\mathcal{M}}]{} & \mathcal{A}(\mathcal{M})/\mathcal{K}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbf{0}, \end{array}$$

この図式の詳しい説明は省略しますが，この図式が表現していることは $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$ と余次元有限な Hardy submodule $\mathcal{M}$ とは C*-環を通して眺めると同じ構造をもっているということです (加群としては全く異なる構造をもつことが知られています).

(iii) 作用素 S_{z_1}, S_{z_2} の研究

Hardy submodule の研究には，その双対の対象も調べる必要があります．$\mathcal{M}$ を Hardy submodule とし，ハーディ空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ も通常の多項式掛け算を作用とする最大の Hardy submodule とみて，ヒルベルト空間の構造を備えた商加群 $H^2(\mathbb{D}^2)/\mathcal{M}$ を考えます．この加群 $H^2(\mathbb{D}^2)/\mathcal{M}$ は backward shift 不変部分空間とよばれ，Hardy submodule の双対の対象とみなすことができます．単項式 z_1, z_2 の掛け算から定まる $H^2(\mathbb{D}^2)/\mathcal{M}$ 上の作用をそれぞれ S_{z_1}, S_{z_2} とします．泉池教授，中路教授との共同研究である [1] では $S_{z_1}^* S_{z_2} - S_{z_2} S_{z_1}^* = 0$ をみたす Hardy submodule を完全に決定しました.

3. 2003 年度研究活動報告

(i) 2003 年度に発表した論文

(1) Submodules of $L^2(\mathbb{R}^2)$, (投稿中).
概要：Beurling の定理にコホモロジーの言葉を用いて新たな視点を与えた Helson の理論の多変数化を考え，[2] で考えた可換条件 $V_{z_1}^* V_{z_2} - V_{z_2} V_{z_1}^* = 0$ の下では多変数でも Helson の議論が平行に進むことを示しました.

(ii) 2003 年度に行った講演

(1) Operator theory in Hardy submodules, 第 42 回 実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 拓殖大学, 2003 年 7 月.
(2) 多変数における Helson の理論について, 関数環研究集会, 新潟大学, 2003 年 11 月.

(iii) 現在進めている研究

多変数における Beurling 型の定理に関連して次の問題を考えています：

「Hardy submodule $\mathcal{M}$ から定まる C*-環 $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ は全て同型か？」

この問題の特別な場合が [3] の中で解いた Berger-Coburn-Lebow の問題に相当します．また，この問いに肯定的に答えることができればそれは多変数における Beurling の定理と見なすことができます．現在， Hardy submodule が有限個の多項式で生成される場合について研究を進めています.

発表論文リスト

1. 審査論文

[1] K. Izuchi, T. Nakazi and M. Seto, Backward shift invariant subspaces in the bidisc II, J. operator theory (掲載決定).

[2] M. Seto, Invariant subspaces on $\mathbb{T}^N$ and $\mathbb{R}^N$, Canad. Math. Bull. (掲載決定).

[3] M. Seto, On the Berger-Coburn-Lebow problem for Hardy submodules, Canad. Math. Bull. (掲載決定).

2. 投稿中の論文

[4] K. Izuchi, T. Nakazi and M. Seto, Backward shift invariant subspaces in the bidisc III, (投稿中).

3. 2003 年度に発表した論文

[5] M. Seto, Submodules of $L^2(\mathbb{R}^2)$, (投稿中).

口頭発表のリスト

1. 招待講演

(i) **発表者** 瀬戸 道生

題名 Operator theory in Hardy submodules
(第 42 回 実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集，pp. 1-8)

学会名 第 42 回 実函数論・函数解析学合同シンポジウム

場所・年月 拓殖大学, 2003 年 7 月

講演内容 [1, 3] の紹介を中心に内外の研究者による Hardy submodule 研究の歴史，最近の結果，今後の問題について報告した.

2. 一般講演

(i) **発表者** 瀬戸 道生

題名 トーラス上の不変部分空間問題

学会名 関数環論とその応用

場所・年月 早稲田大学, 2000 年 12 月

講演内容 [2] の前半に相当する中路の定理について講演をした.

(ii) **発表者** 瀬戸 道生

題名 $\mathbb{R}^2$ 上の不変部分空間

学会名 調和・解析関数空間と線形作用素⊠

場所・年月 京都大学数理解析研究所, 2001 年 11 月

講演内容 [2] の後半に相当する Lax 型定理について講演をした.

(iii) **発表者** 瀬戸 道生

題名 On the Berger-Coburn-Lebow problem for Hardy submodules

学会名 第 11 回関数環・関数空間合同研究集会

場所・年月 北海道大学理学部, 2002 年 12 月

講演内容 [3] について講演した.

(iv) **発表者** 瀬戸 道生

題名 On the Berger-Coburn-Lebow problem for Hardy submodules

学会名 作用素の構造と関連する最近の話題

場所・年月 京都大学数理解析研究所, 2003 年 1 月

講演内容 [3] について講演した.

(v) **発表者** 瀬戸 道生

題名 多変数における Helson の理論について

学会名 関数環研究集会

場所・年月 新潟大学, 2003 年 11 月

講演内容 [5] について講演した.