

# 研究内容・成果、及び、2004年度研究活動報告

氏名 笹原 徹

## (I) 研究内容・成果

二つのリーマン多様体が与えられているとき、その間の写像は一般に沢山存在するが、その中でも”適当”な汎関数の臨界値をとるものは良いものである。私は2-エネルギー汎関数と呼ばれる、テンション場の  $L_2$  ノルムに興味があり、その臨界点となる写像を調べている。この写像は1964年に Eells と Sampson により導入されたものであるが、ターゲットの多様体が  $R$  のときは、弾性論や流体力学等で重要な役割を果たす biharmonic 関数である。このことから、この写像は biharmonic 写像と呼ばれている。

Biharmonic 写像が導入されてから40年程経つが、関数以外の性質はあまり研究されてこなかったようである。その大きな理由として幾何的に面白い例が少なかったことが挙げられる。よって Biharmonic 写像論が進展するためには”良い”例の発見が重要である。これまでの私の研究では、biharmonic 写像の非常に興味深い例と分類結果、また、2-エネルギーの最小値をとるような、ある種の等長はめ込みの具体的構成法を得ることが出来た。以下、それについて述べる。

### ・ Biharmonic 部分多様体の研究

Biharmonic 写像を記述する方程式、つまり2-エネルギーの Euler-Lagrange 方程式は4階の PDE であり、特別な解として調和写像をもつ。調和でない biharmonic 写像を proper であるという。1986年、G.Y.Jiang により proper biharmonic 部分多様体（等長はめ込み）の研究が始められた。その時点では具体的構成法は得られず、知られていた解は  $S^{m_1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^{m_2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$  ( $m_1 \neq m_2, m_1 + m_2 = m$ ) から  $S^{m+1}(1)$  への積はめ込みのみであった。その後も proper biharmonic 部分多様体の研究はされてきたが、付加条件の下での非存在定理のみが量産されてきた。このように proper biharmonic 部分多様体の具体例は Jiang の例しか知られておらず、その研究は殆ど進展していなかった。

ところが、最近の私の研究で5次元単位球面内において proper biharmonic 部分多様体の興味深い新しい例が発見された ([9], [12])。その一つはルジャンドル トーラスである。面白い特徴は、位置ベクトルが Laplacian の二つの固有ベクトルの和で記述されていることである。位置ベクトルが固有ベクトルとなっているものは極小であるので、この性質はスペクトル分解の観点から極小の次にシンプルなものと考えられる。さらに Biharmonic 曲線のテンソル積でも表現されており、また平均曲率一定といった条件も満たしている。もう一つは3次元 Hopf トーラスであり、この位置ベクトルも Laplacian の二つの固有ベクトルの和で記述され、また平均曲率が一定である。以上から私が構成したトーラスはい

ろいろな意味で”良い”トーラスであるといえる。まるで極小部分多様体論におけるクリフォードトーラスのようである。

論文 [9], [12] では 5次元単位球面の proper biharmonic 部分多様体の新しい例を構成しているだけでなく、5次元佐々木空間形の proper biharmonic ルジャンドル曲面と proper biharmonic Hopf 部分多様体を完全に決定することに成功した。また、論文 [11] では佐々木空間形の proper biharmonic ルジャンドル部分多様体が不安定になるための十分条件を導いている。この結果を応用すると論文 [9] で決定されたものは全て不安定であることが分かる。

#### ・2-エネルギーの最小値をとる部分多様体の研究

多様体間の等長はめ込みの中でも 2-エネルギーが最小であるものは特別な意味を持つ。極小はめ込みは明らかにこの条件をみたす写像であるが、与えられた多様体間に極小はめ込みが存在しない場合にはどんな写像が最小値をとるかという問題が提起される。そのようなはめ込みを探す一つの手法として、領域のリーマン不変量によって平均曲率を下から押さえる不等式を構成し、その等号成立条件をみたすものを決定することが考えられる。なぜなら、その等号を満たすはめ込みは各点における平均曲率が他のはめ込みより小さいので必然的に 2-エネルギーの最小値をとるからである。

古くからよく知られている不等式として、スカラー曲率によって平均曲率を下から押さえる関係式があるが、この等号をみたす写像は totally umbilic のみであるので、新しい例を得るためにはそれ以外の不等式を構成しなければならない。1993 年、B.-Y.Chen はスカラー曲率を拡張した概念として  $\delta$ -不変量を定義し、さらに領域の  $\delta$ -不変量によって、はめ込みの平均曲率を下から押さえる不等式を作った。この不等式の等号をみたすはめ込み (部分多様体) を Ideal はめ込み (部分多様体) という。先程述べた理由からこのはめ込みは 2-エネルギーの最小値をとる。

論文 [1], [4] では、複素双曲空間形内の Ideal CR 部分多様体について研究している。複素双曲空間形内の CR 部分多様体を研究対象にした理由は、高 (余) 次元の具体例があまり知られていなかったからである。これらの論文では複素双曲空間の一般 (余) 次元 Ideal CR 部分多様体が、ある特別な Kaehler 部分多様体によって表現されることを示した。その Kaehler 部分多様体を量産することは容易であり、これにより複素双曲空間の Ideal CR 部分多様体が豊富に存在することが明らかとなった。

## (II) 2004年度研究活動報告

### 論文

1. T.Sasahara. Stability of biharmonic Legendre submanifolds in Sasakian space forms.
2. K.Arslan, R.Ezentas, C.Murathan and T.Sasahara. Biharmonic anti-invariant submanifolds.
3. K.Arslan, R.Ezentas, C.Murathan and T.Sasahara. Biharmonic submanifolds in 3-dimensional  $(\kappa, \mu)$ -manifold.
4. K.Arslan, B.Kilic and T.Sasahara.  $\bar{\nabla}$ -harmonic curves and surfaces.

### 口頭発表

1. Biharmonic submanifolds, 京都大学共同利用計画研究集会: 2004年6月: 京都大学.
2. Biharmonic maps, 第51回幾何学シンポジウム: 2004年8月: 東京都立大学.

## 発表論文リスト

氏名 笹原 徹

1. T.Sasahara. CR-submanifolds in complex hyperbolic spaces satisfying an equality of Chen, Tsukuba J. Math. 23 (1999) 565-583.
2. T.Sasahara. Three dimensional CR-submanifolds in the nearly Kaehler six-sphere satisfying B.Y.Chen's basic equality, Tamkang J. Math. 31 (2000) 289-297.
3. T.Sasahara. On Ricci curvature of CR-submanifolds with rank one totally real distribution, Nihonkai Math. J. 12 (2001) 47-58.
4. T.Sasahara. On Chen invariant of CR-submanifolds in a complex hyperbolic space, Tsukuba J. Math. 26 (2002) 119-132.
5. T.Sasahara. Submanifolds in a Sasakian manifold  $R^{2n+1}(-3)$  whose  $\phi$ -mean curvature vectors are eigenvectors, J. Geometry. 75 (2003) 166-178.
6. T.Sasahara. Spectral decomposition of the mean curvature vector fields of surfaces in a Sasakian manifold  $R^{2n+1}(-3)$ , Results in Math. 43 (2003) 168-180.
7. T.Sasahara. Legendre surfaces whose mean curvature vectors are eigenvectors of the Laplace operator, Note di Mat. 22 (2003) 49-58.
8. T.Sasahara. Quasi-minimal Lagrangian surfaces whose mean curvature vectors are eigenvectors, Demonstratio Math. 37 (2004), 印刷中.
9. T.Sasahara. Legendre surfaces in Sasakian space forms whose mean curvature vectors are eigenvectors, Pub. Math. Debrecen. 67 (2005), 印刷中.
10. J.-S.Kim, T.Sasahara and M.M.Tripathi. On invariant submanifolds in contact metric manifolds, to appear in Tsukuba J. Math.
11. T.Sasahara. Stability of biharmonic Legendre submanifolds in Sasakian space forms, プレプリント.
12. K.Arslan, R.Ezentas, C.Murathan and T.Sasahara. Biharmonic anti-invariant submanifolds, プレプリント.
13. K.Arslan, R.Ezentas, C.Murathan and T.Sasahara. Biharmonic submanifolds in 3-dimensional  $(\kappa, \mu)$ -manifold, プレプリント.
14. K.Arslan, B.Kilic and T.Sasahara.  $\bar{\nabla}$ -harmonic curves and surfaces, プレプリント.

## 主たる口頭発表のリスト

氏名 笹原 徹

1. Chen の不等式の等号をみたす部分多様体, 第 46 回幾何学シンポジウム: 1999 年 8 月: 東京大学.
2. Chen の等号をみたす部分多様体, 日本数学会秋季分会: 1999 年 9 月: 広島大学.
3. Ideal CR-submanifolds, 日本数学会 2000 年度年会: 2000 年 3 月: 早稲田大学.
4. CR 部分多様体のリッチ曲率と Chen 不変量, 第 47 回幾何学シンポジウム: 2000 年 8 月: 名古屋大学.
5. Chen invariants of CR-submanifolds, 京都大学共同利用計画研究集会: 2001 年 1 月: 京都大学.
6. Biharmonic Legendre surfaces, 日本数学会 2004 年度年会: 2004 年 3 月: 筑波大学.
7. Biharmonic submanifolds, 京都大学共同利用計画研究集会: 2004 年 6 月: 京都大学.
8. Biharmonic maps, 第 51 回幾何学シンポジウム: 2004 年 8 月: 東京都立大学.