

研究内容・成果および2005年度研究活動報告

佐野 友二 (COE 研究員)

研究内容と成果

compact Kähler 多様体上の標準計量 (Kähler-Einstein 計量、定 scalar 曲率計量、extremal Kähler 計量) の存在問題と幾何学的不変式論 (GIT) の意味での多様体の「安定性」についての関係を中心に研究しています。特に、現在は定 scalar 曲率計量の場合における K-energy の properness と安定性の関係や Nadel の Multiplier ideal sheaf との関係について興味をもっています。

Kähler-Einstein 計量の場合では、Tian により Fano 多様体に対して K-安定性 (のち Donaldson がより一般のケースに拡張) や CM-安定性が定義され、それらが K-E 計量の存在のための必要条件であることが証明されました。これらの結果の中で、汎関数 K-energy の properness と K-E 計量の存在が同値であるという定理が Tian により証明され、重要な役割を果たしています。その証明は S^2 (\mathbf{CP}^1) 上の Moser-Trudinger 型の不等式の複素高次元へ拡張したものに近い形の不等式を証明することで得られました。この結果に関連して、 S^2 での Moser-Trudinger 不等式における best constant について考察しました。Aubin、Moser などにより、Laplacian の第一固有空間との直交条件を加えると best constant が小さくなることが分かっていました。Tian の結果から、 L^2 の意味での直交条件でも best constant が小さくなることが予想されますが、(Kähler 条件を外して考えた場合) それが成り立たないことを "The best constant of the Moser-Trudinger inequality on S^2 " で示しました。

定 scalar 曲率計量 (以下、CSC 計量) の場合、Donaldson、満洲により polarized 多様体 (X, L) が $c_1(L)$ の中に CSC 計量を持つとき漸近的 Chow (Hilbert) 安定性が導かれることと CSC 計量の一意性が証明されました。これは、標準的計量が GIT の安定性と関係していることを意味しています。この結果の中で、次のことが重要な役割の一つを果たします。 X を L^k の section により複素射影空間に埋め込み、代数多様体とみなし、それに対応する Chow point を考えます。このとき、Chow point に対して Zhang が定義した Chow norm を適用すると、K-E 計量の研究では、すでによく知られていた汎関数 F_ω^0 が Chow norm を用いて書くことができることが知られていました。このことと Chow norm の convexity をあわせると与えられた多様体の Chow 安定性が F_ω^0 の臨界点 (balanced 計量) の存在と同値であることが分かります。Donaldson、満洲の結果は、CSC 計量の存在から k が十分大きいときの k -th balanced 計量の存在とその収束および一意性を示すことで得られました。"On stability criterion of complete intersections" では、Chow norm を用いて完全交叉の安定性の判定方法について考察しました。

しかし、Hermitian-Einstein 計量の Hitchin-小林対応のように一対一に対応するような多様体の安定性はまだ知られていません。特に、安定性から標準計量の存在を示した結果はまだ知られていません。一方で、K-E 計量では十分条件として Tian の解析的不変量と Nadel の multiplier ideal sheaf (以下、MIS) の結果が知られています。Tian の結果は不変量の評価を、Nadel の場合は MIS の非存在をもって Monge-Ampère 方程式に関する Continuity Method の a priori 評価を導くものでした。これらは K-energy の properness に深く関係していると思われます。特に Nadel の結果は多様体の安定性を考えるときの一つの糸口になるのではないかと考えています。今は、この結果を CSC 計量の場合へ拡張することを試みています。その際、困難な原因のひとつとして、CSC 計量には Continuity Method が知られていないことがあります。その代わりに、CSC 計量は balanced 計量の極限として存在することが Donaldson により証明されています。そこで K-E 計量における Continuity Method を K-E 計量を求めるためのアルゴリズムと捉えたとき、balanced 計量のアルゴリズムは CSC 計量における Continuity Method の代用になるのではないかとこのことを考えました。その一歩として”Numerical algorithm for finding balanced metrics”で、balanced 計量の存在について考えました。

2005年度研究活動報告

論文

- *Numerical algorithm for finding balanced metrics*, to appear in Osaka Journal of Mathematics.
- *Remark on the properness of K-energy*, in preparation.

口頭発表

- 「balanced 計量と canonical Kähler 計量について」
微分幾何セミナー (筑波大学・2005年6月)
- 「On comparison between balanced metrics and canonical Kähler metrics」
第52回幾何学シンポジウム (福岡大学・2005年8月)
- 「On the approximation of Kaehler potentials」
幾何コロキウム (北海道大学・2005年11月)

論文リスト

佐野友二 (COE 研究員)

- Yuji Sano
”The best constant of the Moser-Trudinger inequality on \mathbf{S}^2 ”
Transactions of American Mathematics Society. 356 (2004), 3477–3482.
- Yuji Sano
”On stability criterion of complete intersections”
Journal of Geometric Analysis. 14 (2004) no. 3, 533–544.
- Yuji Sano
”Numerical algorithm for finding balanced metrics”
to appear In Osaka Journal of Mathematics.

口頭発表リスト

佐野友二 (COE 研究員)

- 「Moser-Trudinger 型不等式と Tian の予想に対する反例」
微分幾何セミナー (東京工業大学・2001年1月)
- 「Moser-Trudeinger 不等式に関する一注意」
非線形問題に関する小さな集い (東京工業大学・2001年2月)
- 「A sharp inequality of Moser-Trudinger type on compact Kahler-Einstein manifolds and a counterexample to Tian's conjecture」
Seminar on Lie groups and geometry (上智大学・2001年4月)
- 「Moser-Trudinger 不等式と Tian の予想の反例について」
微分幾何セミナー (都立大学・2001年6月)
- 「Moser-Trudinger 不等式とベストコンスタントに関する G.Tian の予想への反例」
微分幾何シンポジウム (茨城大学・2001年8月)
- 「Moser-Trudinger 不等式のベストコンスタントと Tian の予想について」
日本数学会秋季会 (九州大学・2001年10月)
- 「On calculations of Chow metric and stability of complete intersections」
9th International Symposium of Complex Geometry (菅平・2003年10月)
- 「Remarks on stability of complete intersections」
幾何セミナー (東京工業大学・2003年11月)
- 「Chow norm と Chow 安定性について」
微分幾何セミナー (都立大学・2004年2月)
- 「Nadel's thesis on multiplier ideal sheaves and its relation with existence of KE metrics」
Towards Intersectional and Cohomological Stability for Manifolds (唐津・2004年6月)
- 「Numerical algorithm for finding balanced metrics」
幾何セミナー (東京工業大学・2004年10月)
- 「balanced 計量とその周辺について」
幾何セミナー (上智大学・2004年11月)

- 「On an algorithm for finding balanced metrics」
Complex Geometry and String Theory (名古屋大学 COE プログラム・2004年12月)
- 「On an algorithm for finding balanced metrics」
幾何セミナー (名古屋大学・2005年1月)
- 「balanced 計量と canonical Kähler 計量について」
微分幾何セミナー (筑波大学・2005年6月)
- 「On comparison between balanced metrics and canonical Kähler metrics」
第52回幾何学シンポジウム (福岡大学・2005年8月)
- 「On the approximation of Kaehler potentials」
幾何コロキウム (北海道大学・2005年11月)