

# 平成18年度ポスドク研究活動報告

平成19年4月2日

日本学術振興会特別研究員

佐治健太郎

## 1 研究内容と成果

ユークリッド空間内の曲面は、そのガウス写像の像が一点になる場合平面となり、一次元に退化する場合、直線の1パラメーター族すなわち、線織面になる。他の空間でもガウス写像の類似物は双曲空間では双曲的ガウス写像などが研究されており、それが退化する場合、ホロ円の1パラメーター族が現れる。これらは平面・球面の持つ性質に近い特別な性質を持った部分多様体を研究する、微分幾何学の立場から重要である。

一方、このような対象には一般に特異点が現れる。たとえば、ユークリッド空間内の円の1パラメーター族である円織面の場合、塩濱・高木の定理により一方の主曲率が一定である完備な曲面は球と円織面の一種である円管面しかないことが知られている。特に、円管面は臍点を持たない。私は、特異点を持つ場合に、上記のような性質を持った曲面としてローラーコースター曲面というクラスを発見した。この曲面は生成する円上に常に特異点を2点持つ。この曲面がカスプ状交叉帽子特異点を持ったとき、その点を通る円上の全ての点は臍点となることを示した。

このように、特異点を考えてこれらを研究すると興味深いことがわかる。私は、これまで  $n$ -織写像と呼ばれる  $n$ -平面の1パラメーター族や、円織面と呼ばれる半径一定の円の1パラメーター族を研究した。

他に私が興味を持っている対象としてフロントと呼ばれるものがある。フロントとは特異点を持った曲面で、特異点でも法線ベクトルが定義可能であるもののことを言い、ホイヘンスの原理に由来する。フロントは、ルジャンドル特異点論の枠組みで論じられる。以前、フロントのカスプ辺特異点に対して特異曲率の概念を導入し、その値と特異点のまわりのガウス曲率について調べた。特異曲率が正だとカスプ辺は丸くなり、負だと反り返ることを示し、ガウス・ボンネ型の定理を示した。また、特異点のまわりでのガウス曲率の振る舞いを調べた。

本年度の研究により得られた結果は以下の通り:

- ルジャンドル多様体への写像として定式化されていた波面の概念を内在的な概念に定式化し、ピークという非常に弱い条件の特異点のみを許した内在的な波面に対して、重要な特異曲線の上組・下組の概念を発見し、それによりガウス・ボンネの定理を証明

した. また, 高次元の波面の A 型と呼ばれる特異点に関して, 使いやすい判定法を証明した.

- ユークリッド空間内の波面の曲率と, 波面を平面へ射影したときに出来る特異点の像の曲率との関係を明らかにした. これにより平面に射影して出来る特異点の数を数えることによって波面の曲がり具合をあらゆる大域的な不変量を計算できるようになる可能性が高い.
- 双曲空間内の曲面に関して, ホ口球との近さを量る幾何学を研究した. そのような意味での曲率が消える曲面を定義し, それをユークリッド空間の線織面の研究と対比させて締活線の存在や特異点について論じた. また, 波面のくちばし, くちびると呼ばれる特異点に関して使いやすい判定法を証明した. 双曲空間と光錐内の曲面間の双対性を論じ, 特異点を持つ点は対応しており, その性質が対になっていることを発見した.
- 波面の A4 分岐と呼ばれる特異点に関して使いやすい判定法を証明した. 同次元間の写像のモラン型と呼ばれる特異点に関して使いやすい判定法を証明した. また, 他の特異点 (モンド型) 等に関しては判定法は得られなかったが, 判定法を得るための足がかりをいくつか得た. これらの判定法は様々な場面で有用であり, 今後はこれらの応用を考えていきたい.
- 曲面, 線叢やある種の微分方程式の解などが持つ微分幾何学的な量とその焦面などに現れる特異点の性質について様々な状況で計算を行い, いくつかのデータを得た.

## 2 発表論文

- [1] K. Saji, *Singularities of non-degenerate 2-ruled hypersurfaces in 4-space*, Hiroshima Math. J. **32** (2002), no. 2, 309–323.
- [2] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Singularities of line congruences*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **133** (2003), no. 6, 1341–1359.
- [3] K. Saji, *Singularities of non-degenerate  $n$ -ruled  $(n + 1)$ -manifolds in Euclidean space*, Geometric singularity theory, 211–225, Banach Center Publ., **65**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004.
- [4] K. Saji, *Bifurcations of Voronoi diagrams and its application to braid theory*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), no. 2, 249–257.

- [5] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), no. 2, 303–351.
- [6] K. Saji and M. Takahashi, *Singularities of smooth mappings with patterns*, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.
- [7] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, to appear in Ann. of Math.
- [8] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Circular surfaces*, to appear in Advances in Geometry.
- [9] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, preprint.
- [10] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space*, preprint.
- [11] K. Saji *Koenderink type theorems for fronts*, preprint.
- [12] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, preprint.

### 3 口頭発表 (主なもの):

- 発表題名 : Singularities of non-degenerate 2-ruled hypersurfaces in  $\mathbf{R}^4$   
 研究会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days  
 日時・場所 : 2001年9月・パナッハセンター, ポーランド・ベンドレヴォ
- 発表題名 : Singularities of ruled manifolds  
 研究会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days  
 日時・場所 : 2002年9月・パナッハセンター, ポーランド・ベンドレヴォ
- 発表題名 : 線織多様体の特異点  
 研究会名 : 日本数学会秋季総合分科会  
 日時・場所 : 2002年9月・島根大学総合理工学部

- 発表題名 : ポロノイ図の分岐とその応用  
 研究会名 : 日本数学会春季年会  
 日時・場所 : 2003年3月・東京大学数理科学研究科
- 発表題名 : Singularities of generalized ruled surfaces  
 研究会名 : Webs and projective differential geometry  
 日時・場所 : 2003年5月・松江・ホテル白鳥
- 発表題名 : Bifurcations of Voronoi diagrams and its applicatoins  
 研究会名 : Mathematical Society of Japan, 12th International Research Insitute,  
 Singularity Theory and Its Applications  
 日時・場所 : 2003年9月・札幌コンベンションセンター
- 発表題名 : 定径円織面について  
 研究会名 : 第51回トポロジーシンポジウム  
 日時・場所 : 2004年8月・山形テルサ
- 発表題名 : 円織面について  
 研究会名 : 函館特異点研究集会  
 日時・場所 : 2004年10月・サン・リフレ函館
- 発表題名 : Circular surfaces  
 研究会名 : Polish-Japanese Singularity Theory Working Days  
 日時・場所 : 2005年9月・ポーランド・ザコパネ
- 発表題名 : Circular surfaces  
 研究会名 : SNU-HU 3rd joint symposium on mathematics  
 日時・場所 : 2005年10月・ソウル大学・韓国
- 発表題名 : Circular surfaces  
 研究会名 : 幾何学唐津研究集会  
 日時・場所 : 2005年10月・虹の松原ホテル
- 発表題名 : Singularities of maps of surfaces into 3-space  
 研究会名 : Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision  
 日時・場所 : 2005年11月・北海道大学理学研究科

- 発表題名 : Singularities of smooth maps with patterns  
 研究会名 : 広島トポロジー研究集会 ( 3・4次元数学を目指して )  
 日時・場所 : 2006年2月・広島大学理学研究科
- 発表題名 : Cuspidal cross cap 特異点の判定とその応用  
 研究会名 : 日本数学会春期年会  
 日時・場所 : 2006年3月・中央大学理工学部
- 発表題名 : フロントのケンデリンクの定理  
 研究会名 : 特異点論 – 局所対大域  
 日時・場所 : 2006年6月・山口大学大学会館
- 発表題名 : Koenderink type theorems for fronts  
 研究会名 : The international symposium on singularity theory and its applications  
 日時・場所 : 2006年9月・長沙理工大学・中国
- 発表題名 : Koenderink type theorems for fronts  
 研究会名 : Hayashibara forum on Singularities  
 日時・場所 : 2006年11月・IHES・フランス
- 発表題名 : Curvatures of singularities of wave fronts and its contour  
 研究会名 : Rencontre Singularités Grand-Sud  
 日時・場所 : 2006年11月・CIRM, Luminy, Marseille・フランス
- 発表題名 : 波面の特異点の判定法とその応用  
 研究会名 : 接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺  
 日時・場所 : 2007年1月・旭川市旭川ときわ市民ホール