

(研究内容・成果)

1．線織面の特異点の研究について

線織面とは3次元空間内の直線の1パラメーター族であり、一般に特異点を持つ。線叢など、次元やパラメーターづける図形を一般化した対象も考えられ、これらも一般に特異点を持つ。これらの特異点を研究している。

これらのジェネリックな特異点に対して、余次元2以下の平面の1パラメーター族のジェネリックな特異点を決定し、それをもつ必要十分条件を与えた。線叢のジェネリックな特異点を決定した。

円織面の特異点に関しても微分幾何学的な見地から研究を行い、ある円の全ての点が臍点となる場合の円織面の特異点はカスプ的交叉帽子となることなどがわかった線叢の場合、法線叢とは限らない場合でも焦曲面に対してイソロトピックリフトが構成できることを示した。

また、線織面の線を曲面上の模様ととらえ、模様付き特異点として研究を行い、曲面の場合のジェネリックな特異点の分類を得た。これらの特異点の数に関して、多様体のトポロジー的な量と関係する合同式を得た。

2．ボロノイ図の分岐の研究について

ボロノイ図とは有限個の点集合からの距離に関するポテンシャル関数の特異点集合であるが、数学のみならず工学・生物学・デザインなどの分野からも注目される重要な対象である。

ボロノイ図に対してコントロール点が動く場合のボロノイ図の変化をジェネリックに分類し、それを結び目理論に応用した。また、可微分写像の開折の理論を応用し、ボロノイ図のドロネー・サドルグラフが変化するための条件を得た。

3．波面の特異点について

波面とは特異点をもつ超平面のあるクラスである。曲面に曲率が一定などの強い条件を課すところのクラスになることが多い。近年、波面に対して特異点を含めて大域的な挙動を調べると、興味深い研究対象になりうるということがわかってきた。

波面に対して、イソトピックリフトを持つが波面にはならない写像がカスプ的交叉帽子を持つための必要十分条件を得た。これを応用し、ミンコフスキー空間内の特異点付きの極大曲面のジェネリックな特異点と、ド・シッター空間内の平均曲率1の特異点付きの曲面のジェネリックな特異点はカスプ辺、スワローテイル、カスプ的交叉帽子であることを示した。高次元の波面に関して、これまで得られていたカスプ辺とスワローテイルの判定法を一般化し、 n -特異、 n -非退化という概念を導入し、これらを利用することにより、ある関数の写像の退化方向に関する高階の微分の項を見ていき、初めて0にならない項が現れた階を見るだけでよいというA型の特異点を持つための計算が容易な必要十分条件を得た。

(2005 年度研究活動報告)

- 模様付き曲面のジェネリックな特異点の分類を得た。これらの特異点の数に関して、多様体のトポロジーク的な量と関係する合同式を得た。
- 線叢の場合、法線叢とは限らない場合でも焦曲面に対してイソロトピックリフトが構成できることを示した。
- 円織面の特異点に関する微分幾何学的な見地から研究を行い、ある円の全ての点が臍点となる場合の円織面の特異点はカスプ的交叉帽子となることなどがわかった。
- ボロノイ図のドロネー・サドルグラフが変化するための条件を得た。
- 写像がカスプ的交叉帽子を持つための必要十分条件を得た。
- ミンコフスキー空間内の特異点付きの極大曲面のジェネリックな特異点と、ド・シッター空間内の平均曲率 1 の特異点付きの曲面のジェネリックな特異点はカスプ辺、スワローテイル、カスプ的交叉帽子であることを示した。
- 高次元の波面に関して、これまで得られていたカスプ辺とスワローテイルの判定法を一般化し、ある関数の写像の退化方向に関する高階の微分の項を見ていき、初めて 0 にならない項が現れた階を見るだけでよいという A 型の特異点を持つための計算が容易な必要十分条件を得た。

(発表論文リスト)

- [1] K. Saji, *Singularities of non-degenerate 2-ruled hypersurfaces in 4-space*, Hiroshima Math. J. 32 (2002), no. 2, 309–323.
- [2] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Singularities of line congruences*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133 (2003), no. 6, 1341–1359.
- [3] K. Saji, *Bifurcations of Voronoi diagrams and its application to braid theory*, J. Knot Theory Ramifications 13 (2004), no. 2, 249–257.
- [4] K. Saji, *Singularities of non-degenerate n -ruled $(n + 1)$ -manifolds in Euclidean space*, Geometric singularity theory, 211–225, Banach Center Publ., 65, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004.
- [5] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. 221 (2005), no. 2, 303–351.
- [6] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, to appear in Ann. of Math.

- [7] K. Saji and M. Takahashi, *Singularities of smooth mappings with patterns*, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.
- [8] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Circular surfaces* preprint.
- [9] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Cuspidal cross caps and singularities of maximal surfaces*, preprint.

(主たる口頭発表のリスト)

- 学会名：特異点における不変量, 発表題目名：Singularities of manifolds with patterns, 発表年月日：2005年6月9日
- 学会名：GEOMETRIC SINGULARITY THEORY POLISH-JAPANESE SINGULARITY THEORY WORKING DAYS, 発表題目名：Circular surfaces, 発表年月日：2005年7月13日,
- 学会名：唐津研究集会発表題目名：Circular surfaces, 発表年月日：2005年10月24日,
- 学会名：Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2005, 発表題目名：Singularities of maps of surfaces into 3-space, 発表年月日：2005年11月16日
- 学会名：広島トポロジー研究集会, 発表題目名：Singularities of smooth maps with patterns, 発表年月日：2006年2月20日
- 学会名：日本数学会春期年会, 発表題目名：Cuspidal cross cap 特異点の判定法とその応用, 発表年月日：2006年3月26日