

2006 年度 研究活動報告

北海道大学大学院理学研究院数学部門 COE 学術研究員

岡部 真也

1. 研究内容・成果

これまで、報告者は、ピアノ線のような弾性体でできた閉曲線がある束縛条件をみたしつつ、曲げエネルギーを最も効率よく減らすように変形していく運動の過程について研究してきた(主題1)。多くの物理現象は、適当なエネルギー汎函数を最も減らす方向に運動する過程としてとらえることができる。これは(安定な)定常状態を求める問題といえる。曲線に対する変分問題としては *elastica* がよく知られており、その研究は Euler まで遡ることができる。また、その他にも多様な研究がなされている。しかし、そのダイナミクスに関しては精密な研究例が豊富とは言えない。その理由の一つとして、系が一つまたは複数の束縛条件をみたしながらエネルギーを減らす方向に運動する場合には数学的取り扱いが複雑になる、ということが挙げられる。このような背景が本研究の動機の一つである。また、本年度から *action minimization* に関連した変分問題に関する研究も行っている(主題2)。本研究の目的は適当なエネルギー汎函数の勾配に支配される曲線および曲面のダイナミクスを解析することである。以下、上記した本研究の二つの主題について述べる。

主題1. ある束縛条件に従う弾性閉曲線のダイナミクス 具体的には、次のような物理的状況を記述する数理モデルについて研究している：

- (A) 平面内にピアノ線のような弾性体でできた閉曲線がある。その閉曲線が囲む領域とその外側が、それぞれ、非圧縮性粘性流体で満たされている状況を考える。閉曲線は曲げエネルギーを減らすように変形していくことが予想される。一方、非圧縮性の仮定により、閉曲線が囲む領域の面積は一定である。このような束縛条件下における、閉曲線のダイナミクスはどのようなものか？
- (B) 平面内のピアノ線のような弾性体でできた閉曲線を考える。この閉曲線が囲む領域の内側とその外側から一様な圧力(例えば水圧)が働いており、内側から働く圧力 p_i より外側から働く圧力 p_o のほうが大きいとする。圧力差 $p := p_o - p_i$ がある値 p^* (buckling load) より小さいときには円が安定であるが、 p が p^* をこえると座屈が生じる。つまり、円でない形状が現れる。このとき、閉曲線のダイナミクスはどのようなものか？

問題(A) および(B) について報告者は、以下のような結果を数学的に証明した。まず曲線の運動については、

定理 1. (論文 [4]) 問題 (A) における環境の中に滑らかな閉曲線を与えると, 閉曲線は非伸縮性と囲む面積を保ちつつ, 曲げエネルギーを最も効率よく解放するように変形していく. そして, 最終的には, 問題 (A) に対応する変分問題によって決定されるある形状へと収束する.

定理 2. (論文 [6]) 問題 (B) における環境の中に滑らかな閉曲線を与えると, 閉曲線は非伸縮性を保ちつつ, エネルギーを最も効率よく解放するように変形していく. そして, 最終的には, 問題 (B) に対応する変分問題によって決定されるある形状へと収束する.

という結果を得た. 一方, 閉曲線の最終的形状についてであるが, 問題 (B) については, [T-O] によって任意の $p > 0$ に対する最小解 (安定な解) の存在が示されており, さらに, [W-I] によって n モード解とよばれる, n 個の対称軸をもつ, 非自明解の存在とその表現公式が与えられている. また, 十分小さな p に対しては, 自明解である円からの分岐解を具体的に摂動法で構成することにより, 分岐直後の n モード解の安定性および不安定性が従う. 報告者は問題 (B) について以下を証明した:

定理 3. (論文 [5]) p は十分大きいとする. n モード解 $\gamma_n(s)$ は各点 $s = jL/n$ の近傍 U_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) において周長が非常に短い円に近い形状である. 一方, $\gamma_n(s)$ のその他の部分は半径 $L/(2(n-1)\pi)$ の円弧に近い形状である.

定理 4. (論文 [6]) p は十分大きいとする. このとき, 2 モード解は安定である. 一方 $n \geq 3$ に対して, n モード解は不安定である. さらに, モードが一つ大きくなるごとに n モード解が不安定化を引き起こす “方向” が少なくとも一つずつ増加する.

主題 2. Action minimization に関連した変分問題 エネルギー汎函数 $E(z)$ が二つの local minimizer z_0 と z_1 をもつとする. このとき, 時間 T の間に z_0 から z_1 への遷移が起こるならば, その遷移過程は action とよばれる汎函数 $\int_0^T |z_t + \nabla E|^2 dt$ を最小化するものとして決定されることが大偏差原理により知られている. この action minimization を, Ginzburg-Landau 汎函数において特異極限をとった場合について考察する研究が最近なされている ([KRT]). こういった action minimization に関する研究を動機として, 次の問題を考える:

(C) 二つの閉曲線 Γ_0, Γ_1 とある正定数 T を与える. このとき, $\gamma(0) = \Gamma_0, \gamma(T) = \Gamma_1$ をみたす曲線族 $\{\gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$ のなかで, 各時刻における曲線の曲率の二乗と法方向への変形速度の二乗の和を空間および時間に関して積分することで定義される汎函数を最小化するものは存在するか?

[KRT] は空間一次元についてであるが, 空間二次元の場合に対応する action 汎函数の中に問題 (C) における汎函数が現れる. 問題 (C) に関する研究は利根川吉廣氏 (北海道大学) との共同研究である. また, 問題の由来から, 曲面に関する問題への拡張が期待され,

本研究はその拡張を視野にいれた第一歩でもある。曲率や速度の二乗積分で定義される汎関数に対する変分問題等についてはこれまで様々な研究がなされているが、問題 (C) のようなタイプの汎関数に対する変分問題は珍しい。

この問題を一般の閉曲線について考察すると、その Euler-Lagrange 方程式は非常に複雑なものとなる。そこで、本年度は研究の第一歩として、曲線を動径対称なものに限定して問題を考察した。そうすることで Euler-Lagrange 方程式はその半径を表すスカラー関数のみで表され、解の存在やその性質を知ることができる。現在は、その得られた結果を参考として、動径非対称な場合の解の存在について研究を進めている。

参考文献

- [KRT] Kohn, R. V., Reznikoff, M. G., Tonegawa, Y., *The shape-interface limit of the action functional for Allen-Cahn in one space dimension*, Calc. Var. PDE, **25** (2006), 503-534.
- [T-O] I. Tadjbakhsh and F. Odeh, *Equilibrium states of elastic rings*, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 59–74.
- [W-I] K. Watanabe and I. Takagi, *On the uniqueness of the minimizer for the Tadjbakhsh-Odeh functional*, preprint.

2. 発表論文リスト

- [1] The motion of an elastic closed curve with constant enclosed area, 数理解析研究所講究録, 1405 (2004), 変分問題とその周辺, 197-213.
- [2] The dynamics of elastic closed curves in the plane under some constraints, 東北大学大学院理学研究科 平成 17 年度 博士論文.
- [3] Asymptotic form of solutions of the Tadjbakhsh-Odeh variational problem, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.
- [4] The motion of elastic planar closed curves under the area-preserving condition, to appear in Indiana Univ. Math. J..
- [5] Asymptotic form of elastic closed curves as uniform pressure tends to infinity, preprint.
- [6] The dynamics of an elastic closed curve under uniform high pressure, preprint.

3. 主たる口頭発表

- [1] 一様な圧力を受ける弾性閉曲線の運動, 日本数学会 2003 年度秋季総合分科会函数方程式分科会, 千葉大学, 2003 年 9 月 27 日.
- [2] 一様な圧力を受ける弾性閉曲線の運動, 盛岡応用数学小研究集会, 岩手大学, 2003 年 10 月 7 日.
- [3] The motion of an elastic closed curve with constant enclosed area, 変分問題とその周辺, 数理解析研究所, 2004 年 6 月 25 日.
- [4] 囲む面積が一定な平面内の弾性閉曲線の運動, 応用数学セミナー, 東北大学, 2004 年 7 月 15 日.
- [5] 囲む面積が一定な平面内の弾性閉曲線の運動, 日本数学会 2004 年度秋季総合分科会函数方程式分科会, 北海道大学, 2004 年 9 月 22 日.
- [6] 囲む面積が一定な平面内の弾性閉曲線の運動, 曲線と曲面の非線型解析, 埼玉大学大宮ソニックシティカレッジ, 2004 年 12 月 17 日.
- [7] 囲む面積が一定な平面内の弾性閉曲線の運動, 曲線と曲面の変分問題と発展方程式, 湯沢グランドホテル, 2005 年 2 月 16 日.

- [8] The asymptotic form of solutions of Tadjbakhsh-Odeh variational problem, MSJ-IRI 2005「漸近解析と特異点」, 仙台国際センター, 2005年7月25日.
- [9] 十分大きな圧力差をもつ Tadjbakhsh-Odeh 変分問題の解の漸近形, 盛岡応用数学小研究集会「遷移過程に現れるパターン形成」-モデリング, シミュレーション, そして解析-, 岩手大学, 2005年10月8日.
- [10] 一つまたは二つの束縛条件をみたす平面閉曲線の運動, 微分方程式の総合的研究, 東京大学, 2005年12月16日.
- [11] The dynamics of an elastic closed curve under external high pressure, Asymptotic Methods for Partial Differential Equations, 北海道大学, 2006年2月9日.
- [12] Asymptotic form of solutions of the Tadjbakhsh-Odeh variational problem, The 7th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis (第7回北東数学解析研究会), 北海道大学, 2006年2月20日.
- [13] On the motion of closed curves under some constraints, 偏微分方程式セミナー, 北海道大学, 2006年4月17日.
- [14] ある束縛条件に従う平面弾性閉曲線のダイナミクス, COE 研究員連続講演会, 北海道大学, 2006年6月13日 - 16日.
- [15] 一様に強い圧力をうける平面弾性閉曲線の安定性および不安定性, 日本数学会 2006年度秋季総合分科会, 大阪市立大学, 2006年9月20日.
- [16] 一様に強い圧力をうける平面弾性閉曲線のダイナミクス, 埼玉大学解析ゼミ, 埼玉大学, 2007年2月28日.