

研究活動報告

北海道大学理学研究院数学部門
COE 研究員 三鍋 聡司

平成 20 年 3 月 13 日

1 研究内容・成果, 及び 2007 年度研究活動報告

1.1 研究内容・成果

私は位相的弦理論や場の理論と関わる幾何学を研究している。特に、曲線や層といった対象の数え上げ(それらの対象のモジュライ空間上の交点理論)を通して定義される不変量に興味を持っている。具体的には、Gromov-Witten 不変量(曲線の数え上げ), Gopakumar-Vafa 不変量(BPS 状態の数え上げ), Donaldson-Thomas 不変量(層の数え上げ), Nekrasov 分配関数(インスタントンの数え上げ)等である。これらの不変量を効率的に計算する方法や不変量同士の関係を調べるのが研究内容である。さらに、そういった計算法や不変量間の関係式の背後にある数学的構造を理解したいと考えている。以下、§2.1 の論文 1 から 5 までの研究成果を説明する。

論文 1 (藤井篤之氏との共同研究) では、ゲージ理論におけるインスタントンの数え上げ問題に関する動機から、トラス作用に関する局所化とヤング図形に関する組合せ論を用いて、簾多様体と呼ばれる空間のベッチ数の生成関数を計算した。

論文 2 (小西由紀子氏との共同研究) では、位相頂点理論を利用して、3次元 toric Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten 不変量の生成母関数の公式のフロップという双有理変換に関する変換性を調べた。結果として 3次元 toric Calabi-Yau 多様体の Gromov-Witten 不変量のフロップに関する不変性を証明した。

論文 3 (小西由紀子氏との共同研究) では、Gromov-Witten 不変量の変形不変性と位相頂点理論を用いて、射影平面の 6 点以下のブローアップとして得られるトーリックでない del Pezzo 曲面の局所 Gromov-Witten 不変量の生成母関数の明示公式を与えた。

学位論文 4 では、上記の論文 2, 3 の結果とその証明を、背景となる Gromov-Witten 不変量の基本事項と位相頂点理論の概要と共にまとめた。特に局所 toric 曲面の場合の位相頂点理論の概要を詳述した。

論文 5 (小西由紀子氏との共同研究) では、位相的開弦理論における Walcher の拡張された正則アノマリー方程式という微分方程式の解の代数的構造について調べた。主結果は、正則アノマリー方程式の解がある次数の(有限変数の)多項式で書けるということ、そして正則アノマリー方程式が多項式の変数に関する偏微分方程式系(即ち連立漸化式)に書き直せるということである。

1.2 2007 年度研究活動報告

2007 年度は主に開ミラー対称性に関する研究を行った。ミラー対称性について簡単に説明しよう。次の問題は代数幾何学では古典的である。

問題 1. 複素 4 次元射影空間内の 5 次超曲面 Q 上に、次数 d の有理曲線は何本あるか?

ただし、有理曲線の本数は Gromov-Witten 不変量の理論を用いて定式化されるものとする。この問題に対して次のような解答が知られている。有理曲線の本数(Gromov-Witten 不変量)の次数 d に関する生成母関数を考えると、それはミラー変換という変数変換によって超幾何型の級数で書き表す事が出来る。この事実は、ミラー対称性と呼ばれる位相的弦理論の双対性を通して、1990 年頃に Candelas によって発見された。最初の数学的証明は 1995 年に Givental によって与えられ、現在ではミラー定理と呼ばれている。次に、問題 1 の‘実版’を考えよう。

問題 2. Q を実構造を持つ 5 次超曲面とする時, Q 上に次数 d の実な有理曲線は何本あるか?

この問題は, (次数 d が奇数ならば) Q の実構造から定まる実点の集合 $Q(\mathbb{R})$ に境界を持つ正則円盤を数える問題と等価である. 2006 年に Walcher がそのような正則円盤の数え上げ問題に対する開ミラー定理, 即ち正則円盤の数の生成母関数がミラー変換によって超幾何型の級数に写されるということを予想した. その証明は, Pandharipande 等によって同じ年に直ちに与えられた. 彼らの証明は正則円盤の開 Gromov–Witten 不変量の理論と Givental のミラー定理に基づくものである. 上の条件を満たす正則円盤の数は実有理曲線の本数の 2 倍とみなせることから, Pandharipande 等の結果は問題 2 に対する 1 つの解答と見なす事もできる. 第 14 回 COE 研究員連続講演会ではこれについて解説した.

上記の問題 1 は 5 次超曲面以外の多くの 3 次元 Calabi–Yau 多様体に対して拡張されている. 問題 2 についても同様の拡張を考えることは自然な問題である. 私は, 秦泉寺雅夫氏, 小西由紀子氏と共同で, 重み付き射影空間内の完全交差として実現される 3 次元 Calabi–Yau 多様体であって, 主に $h^{1,1} = 1$ なるものに対して, Pandharipande 等の結果を拡張することを考えた. 拡張が非常に容易に得られる場合もあるが, いくつかの場合には 5 次超曲面の場合とは本質的に異なる問題にぶつかり, 未だ問題を解決出来ていない. さらなる研究が必要である. また, 同じ問題を “B-model” 側から研究している鈴木久男氏, 藤博之氏とも議論を続けている.

以上の内容と, 高い種数の開ミラー対称性に関わる論文 5 が 2007 年度の研究内容である. セミナー, 研究集会等における発表もこれらのいずれかの内容に関するものであった. その他の活動としては, Mathematical Reviews の reviewer をやった.

2 発表論文リスト

2.1 論文・プレプリント

1. (with S. Fujii), *A combinatorial study on quiver varieties*, Preprint, arXiv:math.AG/0510455.
2. (with Y. Konishi), *Flop invariance of the topological vertex*, International Journal of Mathematics, **19**, No.1, (2008), 27–45.
3. (with Y. Konishi), *Local Gromov–Witten invariants of cubic surfaces via nef toric degeneration*, To appear in Arkiv för matematik.
4. *Topological vertex and its applications*, PhD Thesis, available at <http://hdl.handle.net/2237/7811>.
5. (with Y. Konishi), *On solutions to Walcher’s extended holomorphic anomaly equation*, Commun. Number Theory and Physics, **1**, No.3 (2007), 579–603 .

2.2 報告集・その他

1. *Introduction to the topological vertex*, 第 11 回代数学若手研究会報告集 (電子出版), 9 pp, (<http://eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/archive/00001574/> から入手可能).
2. 三次曲面の局所 Gromov–Witten 不変量について, 第 53 回幾何学シンポジウム予稿集, 149–156.
3. *Flop invariance of the topological vertex*, Contribution to the proceedings of MSJ-IHES joint workshop on Noncommutativity (15–18 Nov. 2006), To appear in Adv. Stud. Pure Math..
4. 開ミラー対称性における最近の進展, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics, #130, March 2008.

3 主たる口頭発表のリスト

1. Instanton counting on ALE spaces, String theory seminar, Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo, Canada, 2005 年 1 月 18 日.
2. トーリック曲面上のインスタトンの数え上げ, インスタントンの数理と物理, 名古屋大学, 2005 年 2 月 12 日.
3. String/gauge 理論対応の幾つかの側面, 指数定理とその可能性 III, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2005 年 9 月 11 日, 13 日 (3 回連続講演).
4. Introduction to the Topological Vertex, 第 11 回代数学若手研究会, 名古屋大学, 2006 年 3 月 4 日.
5. 三次曲面の局所 Gromov–Witten 不変量について, 第 53 回幾何学シンポジウム, 金沢大学, 2006 年 8 月 6 日.
6. (with 小西由紀子), Flop invariance of the topological vertex, 日本数学会 2006 年度秋季総合分科会, 大阪市立大学理学部, 2006 年 9 月 28 日.
7. Flop invariance of the topological vertex, MSJ-IHES workshop on noncommutativity (short communication), IHES, France, 2006 年 11 月 15 日.
8. Topological vertex and local Gromov–Witten invariants of del Pezzo surfaces, Institute seminar at the Institute Mittag–Leffler. 2006 年 12 月 7 日.
9. (with 小西由紀子), 位相頂点理論とデル・ペゾ曲面の局所グロモフ・ウィッテン不変量, 日本数学会 2007 年度年会幾何学分科会, 埼玉大学理学部, 2007 年 3 月 28 日.
10. Solving Walcher’s extended holomorphic anomaly equation for the mirror quintic, 幾何学コロキウム, 北海道大学理学部, 2007 年 10 月 5 日.
11. On solutions to Walcher’s extended holomorphic anomaly equation, The 13th International Symposium on Complex Geometry, 信州菅平高原 プチホテル ゾンタック, 2007 年 10 月 27 日.
12. 開ミラー対称性における最近の進展, 第 14 回 COE 研究員連続講演会, 北海道大学理学部, 2007 年 11 月 19 日, 20 日, 21 日.
13. Polynomial structure of solutions to Walcher’s extended holomorphic anomaly equation, The 10th SNU-HU Joint Symposium of Mathematics, 2008 年 1 月 25 日, Seoul National University.
14. A Review of Disc Counting on Complete Intersections in Projective Spaces, mini-workshop on mirror symmetry, 北海道大学理学部, 2008 年 1 月 30 日.
15. (with 小西由紀子), On solutions to Walcher’s extended holomorphic anomaly equation, 日本数学会 2008 年度年会, 無限可積分系セッション, 近畿大学工学部, 2008 年 3 月 24 日. (予定)