

研究活動報告

COE 研究教育支援員 小林 保幸

1. 研究内容・成果

(1) Zalcman 領域上の有界正則関数の構成について；

2 葉被覆面の点分離の問題 (Myrberg 現象) の研究へ応用することを目的として、複素平面上のある種の無限連結領域上で有界な正則関数の構成について研究した。

考える領域はつぎのようなものである。 Δ_0 を穴あき単位円板とし、その中に数列 $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ を $1 > c_n \searrow 0$ なるようにとる。 Δ_n を中心 c_n 半径 r_n の互いに交わらない閉円板とし、領域 $D(c_n, r_n) := \Delta_0 \setminus \cup \Delta_n$ を考えると、これは無限連結領域になっている。この領域を Zalcman 領域と呼ぶ。

与えられた $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ が $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$ をみたせば無限積 $p(z) = \prod_{n=1}^\infty z/(z - c_n)$ は収束して、 Δ_0 上の有理型関数を定める。ここで半径 r_n をどのようにとれば p が $D(c_n, r_n)$ 上有界になるかという問題に対し、次の結果を得た。

$\{c_n\}_{n=1}^\infty$ が条件 $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ をみたすとき、 $p \in H^\infty(D(c_n, r_n))$ となるための必要十分条件は $\sup_{n \in \mathbb{N}} c_n^n / (c_1 \cdots c_{n-1} r_n) < \infty$ 。

$(\tilde{\Delta}_0, \Delta_0, \pi)$ を限界のない 2 葉被覆面で $\{\pi^{-1}(c_n)\}_{n=1}^\infty$ を分岐点にもつものとする。 $\tilde{D} = \pi^{-1}(D) \subset \tilde{\Delta}_0$ とおくと、 (\tilde{D}, D, π) は限界のない分岐点をもたない 2 葉被覆面になる。 $H^\infty(\tilde{D}) = H^\infty(D) \circ \pi$ が成立するとき (\tilde{D}, D, π) について Myrberg 現象が起こるといふ。上記の結果を用いると、Myrberg 現象について Hayashi と Nakai により得られた $c_n = 2^{-n}$ の場合の結果を $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ なる場合に拡張することができる。

$\{c_n\}_{n=1}^\infty$ は $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ をみたすとする。

(1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} c_n^n / (c_1 \cdots c_{n-1} r_n) < \infty$ ならば (\tilde{D}, D, π) について Myrberg 現象は起こらない。(2) $H^\infty(D)$ に対し $z = 0$ で一致の定理が成り立つならば $N(n) \rightarrow \infty$ 。

ここで $H^\infty(D)$ に対し $z = 0$ で一致の定理が成り立つとは、次の性質をもつ $f \in H^\infty(D)$ は $f \equiv 0$ に限るときのことをいう； $\lim_{z < 0, z \rightarrow 0} f^{(m)}(z) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)。

関数 p は導関数については $\lim_{z < 0, z \rightarrow 0} p^{(m)}(z) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) が成り立つので p が D 上有界ならば一致に定理が成り立たないことがわかる。

以上の結果は $\{c_n\}$ が条件 $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n < 1$ をみたす場合のものである。この条件をみたさない場合として、中心列 $c_n = n^{-\alpha}$ ($1 < \alpha \leq 2$) を考える。このとき、半径 r_n をどのようにとっても p は Zalcman 領域 $D(c_n, r_n)$ 上有界にならないことを証明した。

(2) 複素平面の単位円板上の p 乗可積分な正則関数のなす Banach 空間について；

複素平面の単位円板上の Hardy 空間 H^p については充分研究がなされ、種々の性質について精密な結果が知られるに至っている。近年 Bergman 空間 L_a^p についても研究が進み基礎理論が確立されるにしたがい、Hardy 空間と Bergman 空間との相違点に分かってきた。そのひとつとして、属する関数の零点のみたす性質があげられる。Hardy 空間 H^p に属する関数の零点は p に依らず Blaschke 条件で完全に記述されるが、Bergman 空間に属する関数の零点については Blaschke 条件は必ずしもみたされず、 p に依存もする (C. Horowitz)。

Bergman 型の別の関数族については、点列がそこに属する関数の零点であるための必要十分条件が、ある種の密度の言葉で、知られている。しかし、 L_a^p については簡潔な必要十分条件はいまだ知られていない。

このような背景のもと、現在次の 2 点について、まず $p = 2$ のとき、すなわち Hilbert 空間 L_a^2 を対象として研究している。

- L_a^p の部分空間または族で、関数の零点について簡潔な記述が可能なものはないか。
- L_a^p の関数で、零点についてある簡潔な条件をみたす族を考え、その族は L_a^p 全体との程度隔たりがあるかを考察する。

(3) 開 Riemann 面上の有界正則関数のなす Banach 環について:

上の (1) の Zalcman 領域 D 上の有界正則関数全体のなす Banach 環に対し、L. Zalcman は “distinguished homomorphism” を導入した。これを種数無限大の Riemann 面で考察したい。Zalcman 領域の 2 葉被覆面 (\tilde{D}, π, D) は種数無限大の Riemann 面となる。一般に Riemann 面 R を基底空間とする有限葉の被覆面 (\tilde{R}, π, R) はそれらの上の有界正則関数環の極大イデアル空間のあいだの写像 $\tau: \mathfrak{M}(\tilde{R}) \rightarrow \mathfrak{M}(R)$ を引き起こす。M. Nakai の結果によれば、 $\varphi \in \mathfrak{M}(R)$ に対し $\tau^{-1}(\varphi)$ は高々葉数個の元からなることが分っている。従って上の設定では distinguished homomorphism $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(D)$ に対し $\tau^{-1}(\varphi_0)$ は 1 個または 2 個であることは分る。そこで、現在次の 2 点について考察している。

- $\tau^{-1}(\varphi_0)$ は 1 個または 2 個に一定か否か
- 一定でなければ、 D のどのような性質により個数が決定されるか

2. 発表論文リスト

- (1) Mikihiro Hayashi, Yasuyuki Kobayashi and Mitsuru Nakai :
A Uniqueness Theorem and the Myrberg Phenomenon for a Zalcman Domain.
J. d'Analyse Math. **82** (2000) 267–283.
- (2) Yasuyuki Kobayashi :
On boundedness of a function on a Zalcman domain.
Proc. Japan Acad. **77**, Ser.A No.1 (2001) 22-24.

3. 主たる口頭発表のリスト

- (1) 小林 保幸 :
「Zalcman 領域における一致の定理」
日本数学会函数論分科会 一般講演 於広島大学 (1999 年 9 月)
- (2) 林 実樹廣, 小林 保幸, 中井 三留 :
「A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon for a Zalcman domain」
解析関数空間とその上の作用素環 研究集会
於京都大学数理解析研究所 (1999 年 11 月)
- (3) 小林 保幸 :
「On boundedness of a function on a Zalcman domain」
関数環論とその応用 研究集会 於早稲田大学 (2000 年 12 月)
- (4) 小林 保幸 :
「正則関数による一様近似など」
関数環若手セミナー 於 岩手医科大学 (2004 年 8 月)