

## 2005 年度研究活動報告

日本学術振興会 特別研究員  
勝良健史

### 1. 研究内容・成果, 及び, 2005 年度研究活動報告

私は力学系に関わる  $C^*$  環の研究を行っている. 局所コンパクト空間  $\Omega$ , 局所コンパクト群  $G$ ,  $G$  の  $\Omega$  への作用  $\sigma$  の 3 つ組  $(\Omega, G, \sigma)$  を位相力学系というが, これに対し接合積と呼ばれる新しい  $C^*$  環  $C_0(\Omega) \rtimes G$  を構成することができる. 整数群  $\mathbb{Z}$  の局所コンパクト空間  $\Omega$  への作用は  $\Omega$  上の一つの同相写像によって定まるので, 接合積  $C_0(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}$  は同相写像  $C^*$  環と呼ばれている. 接合積という構成方法は,  $C^*$  環  $A$ , 局所コンパクト群  $G$ ,  $G$  の  $A$  への作用  $\alpha$  の 3 つ組  $(A, G, \alpha)$  である非可換力学系に対しても考えることができる. この構成方法とは別に, Markov シフトという位相力学系を研究するため, Cuntz-Krieger 環と呼ばれる  $C^*$  環が Cuntz と Krieger によって導入された. これは Cuntz によって導入された Cuntz 環  $\mathcal{O}_n$  の拡張になっている.

私は上に挙げた, 力学系から  $C^*$  環を構成する二通りの方法の関係や, これらを拡張したものを研究している. 私がこれまで行ってきた研究は大きく次の 3 つのクラスに分けることができる.

#### Cuntz 環の可換群による quasi-free 作用による接合積 (論文 [1], [2], [3])

局所コンパクト群  $G$  の  $n$  次元表現が与えられると,  $G$  の Cuntz 環  $\mathcal{O}_n$  への quasi-free 作用と呼ばれる作用を定義することができる. 私は [1], [2], [3] において, 可換局所コンパクト群  $G$  の Cuntz 環  $\mathcal{O}_n$  への quasi-free 作用による接合積  $\mathcal{O}_n \rtimes G$  の構造を解析した.

[1], [3] で, 接合積  $\mathcal{O}_n \rtimes G$  のイデアル構造を完全に決定することに成功した. その系として, 岸本氏によって得られた接合積  $\mathcal{O}_n \rtimes G$  が単純になるための特徴づけの別証明を得た. その他に, 接合積  $\mathcal{O}_n \rtimes G$  がいつ原始的になるかの特徴づけを求め,  $\mathcal{O}_n \rtimes G$  の  $K$  群を計算した.

[2] では, 接合積  $\mathcal{O}_n \rtimes G$  が純粋無限となるための必要十分条件や AF 埋め込み可能となるための十分条件を求めた. その結果として, 接合積  $\mathcal{O}_n \rtimes G$  は単純ならば, 純粋無限か AF 埋め込み可能のどちらかになるという結果を得た.

#### 位相グラフから作られる $C^*$ 環 (論文 [4], [8], [9], [10], [11], [12])

私は, [4] で位相グラフというものを導入し, それから  $C^*$  環を構成する方法を提案した. 位相グラフとは局所コンパクト空間  $\Omega$ ,  $\tilde{\Omega}$  と局所同相写像  $d: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ , 連続写像  $r: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  の 4 つ組  $(\Omega, \tilde{\Omega}, d, r)$  のことである.  $\Omega$  上の同相写像  $\sigma$  が与えられたとき,  $(\Omega, \Omega, \text{id}_\Omega, \sigma)$  は位相グラフになり, それからできる  $C^*$  環は同相写像  $C^*$  環と同型になる. このように, 位相グラフ及びそれから定まる  $C^*$  環は, それぞれ同相写像及び同相写像  $C^*$  環を拡張したものと考えることができる. この視点は, 位相グラフからできる  $C^*$  環の構造を解析する上でとても重要な役割を演じる. また,  $\Omega$  が離散空間のときは上の 4 つ組は普通の (有向) グラフになり, それからできる  $C^*$  環はグラフ環と同型になる. グラフ環とは, 様々ある Cuntz-Krieger 環の拡張の一つであり, 多くの数学者によって細部にわたって研究されているものである. 上で挙げた Cuntz 環の接合積は自然に位相グラフから作られる  $C^*$  環とすることができる.

[4] ではさらに, 位相グラフから作られる  $C^*$  環が,  $C^*$  環の分類理論を遂行する上で不可欠な 2 条件「核型である」「普遍係数定理が成り立つ」を満たすことを示した. また, グラフ環や同相写像  $C^*$  環に対しては既に知られているゲージ不変一意性定理と Cuntz-Krieger 一意性定理という 2 つの定理を, 位相グラフから作られる  $C^*$  環に対して証明した. さらに, この  $C^*$  環の  $K$  群を計算する上で有用な 6 項完全系列を求めた.

[8] では, 上で述べた構成方法の応用として, scaling element から作られる  $C^*$  環に対する結果を得た. scaling element は  $C^*$  環が無射影を含むことを示す上で重要な役割を演じる元であるが, 私は scaling element で生成される  $C^*$  環がいつ無射影を含むかを完全に決定した. また,

等距離作用素に対する Coburn の定理を scaling element に対して拡張することに成功した。

[9] では位相グラフを作る様々な方法を提案した。これにより、グラフ環や同相写像  $C^*$  環としては現れない多くの  $C^*$  環を位相グラフから構成できることがわかった。また、位相グラフから  $C^*$  環を作る方法は、接合積だけでなく、これまで様々な研究者によって調べられてきた構成方法を自然に含んでいることを示した。

[10] では、極小性や位相的推移性など位相力学系に対して定義されている様々な概念を位相グラフに対して拡張し、これらが位相グラフから作られる  $C^*$  環の構造とどのような関係があるかを明らかにした。そして、位相グラフから作られる  $C^*$  環のイデアル構造をほぼ完璧に記述することに成功した。その結果として、位相グラフから作られる  $C^*$  環が単純、または素になるための必要十分条件を位相グラフの言葉で書き下すことができた。そして、位相グラフを用いて素であるが原始的でない  $C^*$  環を作り出した。

### $C^*$ 連絡から作られる $C^*$ 環 (論文 [5], [6], [7])

[5] では  $C^*$  連絡と呼ばれるものから  $C^*$  環を構成する方法を提案した。 $C^*$  環  $A$  に対し、 $A$  上の  $C^*$  連絡とは  $A$  値右内積を持つ  $A$  双加群のことで、 $A$  の自己準同型写像を拡張したものである。また位相グラフ  $(\Omega, \tilde{\Omega}, d, r)$  から可換  $C^*$  環  $C_0(\Omega)$  上の  $C^*$  連絡を作ることができる。私の提案した  $C^*$  連絡から  $C^*$  環を構成する方法は、自己準同型から接合積を作る方法や、位相グラフから  $C^*$  環を構成する方法を拡張している。またこの構成方法は、Cuntz-Pimsner 環や Hilbert  $C^*$  双加群による接合積のどちらをも特別な場合として含んでいる。

[6] では、 $C^*$  連絡から作られる  $C^*$  環に対して、ゲージ不変一意性定理と呼ばれる定理を証明した。また、これらの  $C^*$  環が核型または完全になるための必要十分条件を求めた。そして、これらの  $C^*$  環の  $K$  群を計算する上で有効な 6 項完全系列を計算した。この 6 項完全系列はこれまでに知られている多くの結果を拡張したものである。

[7] では、[6] で証明したゲージ不変一意性定理をもとにして、 $C^*$  連絡から作られる  $C^*$  環のゲージ不変イデアルの分類を行った。このイデアル構造の分類を用いて、私の構成した  $C^*$  環がある種の極小性を満たすことを証明した。これは、私の構成方法が「接合積」の自然な拡張となっていることを保証してくれる証拠の 1 つである。

今年度は、まず [11] で可分でない AF 環に対して可分では起こりえない病的な現象がおきる事を調べた。そのうちの一つは、可分でない AF 環で素であるが原始的でない  $C^*$  環を構成することができるというもので。昨年度 [10] において位相グラフを用いて作った例を整理したものになっている。

また、[4] から続くシリーズの最後として [12] で位相グラフから作られる  $C^*$  環がいつ純無限という性質を持つかを調べた。純無限  $C^*$  環の中で特にいい条件を持つものを Kirchberg 環というが、私は全ての Kirchberg 環が位相グラフから作られる  $C^*$  環として表れるということを示した。これは、Kirchberg 環の新しい構成方法を与え、Kirchberg 環に対するいくつかの未解決問題を解く上で有効であると期待される。実際、私はこの構成方法を用いて、Kirchberg 環の  $K$  群の自己同型写像は位数を変えずに Kirchberg 環の自己同型写像に持ち上げることができることを示した。この結果は、この方向で今までに知られている結果を全て拡張するものであり、有限群の Kirchberg 環の  $K$  群への作用は全て Kirchberg 環への作用に持ち上げることができるかという未解決問題に対する新たな進展である。私の上記の結果は実際には、次の二つの結果を合わせて導かれるものである。まず、私は群加群に対して置換表現を持つという概念を定義し、任意の Sylow 群が巡回群である有限群に対しては、任意の加群が置換表現を持つことを示した。これは有限群加群に対する新しい結果である。そして、群の Kirchberg 環の  $K$  群への作用に対して、それが定義する加群が置換表現を持つなら Kirchberg 環への作用に持ち上げることができるということを示した。

## 2 . 発表論文リスト

- [1] The ideal structures of crossed products of Cuntz algebras by quasi-free actions of abelian groups, *Canad. J. Math.*, 55 (2003), no. 6, 1302–1338.
- [2] AF-embeddability of crossed products of Cuntz algebras, *J. Funct. Anal.* 196 (2002), no.2, 427-442.
- [3] On crossed products of the Cuntz algebra  $\mathcal{O}_\infty$  by quasi-free actions of abelian groups, *Operator algebras and mathematical physics*, 209–233, Theta, Bucharest, 2003.
- [4] A class of  $C^*$ -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism  $C^*$ -algebras I, fundamental results, *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 (2004), no. 11, 4287-4322.
- [5] A construction of  $C^*$ -algebras from  $C^*$ -correspondences, *Advances in Quantum Dynamics*, 173-182, *Contemp. Math*, 335, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [6] On  $C^*$ -algebras associated with  $C^*$ -correspondences, *J. Funct. Anal.*, 217 (2004), 366-401.
- [7] Ideal structure of  $C^*$ -algebras associated with  $C^*$ -correspondences, to appear in *Pac. J. Math.*
- [8]  $C^*$ -algebras generated by scaling elements, to appear in *J. Operator Theory*.
- [9] A class of  $C^*$ -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism  $C^*$ -algebras II, examples, to appear in *Internat. J. Math.*
- [10] A class of  $C^*$ -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism  $C^*$ -algebras III, ideal structures, preprint 2004.
- [11] Non-separable AF-algebras, preprint 2005.
- [12] A class of  $C^*$ -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism  $C^*$ -algebras IV, pure infiniteness, preprint 2005.

## 3 . 主たる口頭発表のリスト

- May, 29, 2001, On crossed products of Cuntz algebras by quasi-free actions of abelian groups, in *Operator Algebras one-year program*, at MSRI, Berkely, USA.
- June, 12, 2001, On crossed products of Cuntz algebras by quasi-free actions of abelian groups, in *operator algebra seminars at University of Tokyo*, at University of Tokyo.
- July 6, 2001, AF-embedding of crossed products of Cuntz algebras in *4th Operator Algebras International Conference (July 2 – 7, 2001)* at Constanta, Romania.
- August, 14, 2001, Crossed products of Cuntz algebras, in “36th Functional Analysis meeting” (August 13 – 15, 2001) at Shirahamasou, Shiga.
- September, 12, 2001, AF-embedding of crossed products of Cuntz algebras, in “Operator Algebras and Their Applications” (September 12 – 14, 2001) at RIMS, Kyoto University.
- December, 4, 2001,  $C^*$ -algebras arising from continuous graphs, in *operator algebra seminars at University of Tokyo*, at University of Tokyo.

- January, 24, 2002, Continuous graph algebras, in “Recent Aspects of  $C^*$ -algebras” (January 23 – 25, 2002) at RIMS, Kyoto University.
- March, 5, 2002, Crossed products of Cuntz algebras, in Analysis seminar at University of Oregon, Eugene, USA.
- May, 25, 2002, Ideal structures of crossed products of Cuntz algebras, in The Great Plains Operator Theory Symposium, 2002 (May 21 – 26, 2002) at University of North Carolina at Charlotte, USA.
- July, 31, August, 2, 2002, On classification theory of  $C^*$ -algebras, in “37th Functional Analysis meeting” (July 30 – August 2, 2002) at Seminar House Kogakkan, Kansai University.
- August, 17, 2002, A class of  $C^*$ -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism  $C^*$ -algebras, in ICM2002 Satellite Conference on Operator Algebras and Applications (August 14 – 18, 2002) at Chengde, China.
- September, 6, 2002, A continuous analogue of Cuntz-Krieger algebras, in A classification of symbolic dynamical systems and its applications to operator algebras (September 6 – 8, 2002) at Research and International Exchange Plaza, Kyushu University.
- September, 12, 2002, A class of  $C^*$ -algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism  $C^*$ -algebras, in “The structure of operator algebras and its applications” (September 11 – 13, 2002) at RIMS, Kyoto University.
- November, 7, 2002, Graph algebras, homeomorphism  $C^*$ -algebras, and their generalization, in Functional analysis colloquium, at University of California, Berkeley, USA.
- November, 10, 2002, A continuous analogue of graph algebras, in Groupoid Fest 2002 (November 9 – 10, 2002) at University of Nevada, Reno, USA.
- November, 14, 2002, A new concept of topological dynamical systems and thier  $C^*$ -algebras, in Analysis-Topology seminar, at University of Nevada, Reno, USA.
- December, 3, 2002, A generalization of dynamical systems and their  $C^*$ -algebras, in Analysis seminar at University of Oregon, Eugene, USA.
- January, 18, 2003, A class of nuclear  $C^*$ -algebras associated with topological graphs, in AMS Special Session on  $C^*$ -Extensions and Classifications of  $C^*$ -Algebras, Joint Mathematics Meetings (January 15 – 18, 2003), at Baltimore Convention Center, Baltimore, USA.
- March, 26, 2003, A construction of  $C^*$ -algebras from  $C^*$ -correspondences, in Annual Meeting of Mathematical Society of Japan (March 23 – 26, 2003), at University of Tokyo.
- May, 28, 2003, A new construction of  $C^*$ -algebras from  $C^*$ -correspondences, in The 23rd Annual Great Plains Operator Theory Symposium (May 28 – June 1, 2003) at University of Illinois, Urbana-Champaign, USA.
- October, 9, 2003, On scaling elements, in operator algebra seminars at University of Tokyo, at University of Tokyo.
- October, 18, 2003, What should crossed products be? in West Coast Operator Algebra Symposium (October 16 – 18, 2003), at Banff International Research Station, Banff, Canada.

- October, 30, 2003, On  $C^*$ -algebras associated with  $C^*$ -correspondences, in Operator Algebras Seminar, at Purdue University, West Lafayette, USA.
- November, 1, 2003, Dynamical systems and  $C^*$ -algebras, in Wabash Modern Analysis Mini-conference (November 1 – 2, 2003), at Indiana University-Purdue University Indianapolis, USA.
- November, 11, 2003, Orbit structure of topological correspondences, in Analysis seminar at University of Oregon, Eugene, USA.
- December, 13, 2003, On  $C^*$ -algebras associated with  $C^*$ -correspondences, in Kansai operator algebras seminar at Kochi University.
- January, 21, 2004,  $C^*$ -algebras generated by scaling elements, in Kyoto Operator algebras seminar at Kyoto University.
- April, 26, 2004,  $C^*$ -algebras generated by scaling elements, in Monday Analysis Seminar at Hokkaido University.
- May, 20, 2004, Cocycles of graphs and crossed products, in operator algebra seminars at University of Tokyo, at University of Tokyo.
- May, 29, 2004,  $C^*$ -algebras generated by scaling elements, in GPOTS 2004 (May 26 – May 30, 2004), at Texas A&M University, USA.
- June, 4, 2004, Topological graphs, in Graph Algebras: Operator Algebras We Can See (May 31 – June 4, 2004), at the University of Iowa, USA.
- June, 10, 2004, Scaling elements and topological graphs, in Mathematics Colloquium, at the University of Iowa, USA.
- June, 16, 21, 28, July, 7, 14, 2004,  $C^*$ -algebras of topological graphs, in Operator Algebras Seminar, at Hokkaido University.
- August, 6, 2004, Dynamical systems and operator algebras, in Special seminar, at Hokkaido University.
- September, 3, 2004, Non-separable AF algebras, in Abel Symposium 2004, at Voksenasen, Oslo, Norway.
- September, 10, 2004, A construction of simple purely infinite  $C^*$ -algebras, in Operator algebra seminar, at University of Southern Denmark, Odense, Denmark.
- September, 15, 2004, Topological graphs and their  $C^*$ -algebras, in Operator Algebra Seminar, at University of Copenhagen, Denmark.
- September, 20, 2004, Topological graphs and their  $C^*$ -algebras, in Mathematical Society of Japan 2004 Autumn Meeting (Sep 19 – 22, 2004), at Hokkaido University.
- October, 31, 2004, Quasidiagonality of quotients of homeomorphism  $C^*$ -algebras, in The structure of amenable systems (October 30 – November 4, 2004), at Banff International Research Station, Banff, Canada.

- November, 12, 2004, An AF-algebra which is prime but not primitive, in Analysis seminar, at University of Nevada, Reno, USA.
- November, 13, 2004, Ideal structure of  $C^*$ -algebras of SGDSs, in Groupoid Fest 2004 (November, 13 – 14, 2004) at University of Nevada, Reno, USA.
- January, 24 – 26, 2005, Construction of  $C^*$ -algebras, in “Recent development of classification problems in the Operator Algebras” (January 24 – 26, 2005) at RIMS, Kyoto University.
- May, 31, 2005, A construction of Kirchberg algebras, in Operator Algebras Seminar, at Hokkaido University.
- June, 9, 2005, A construction of all classifiable Kirchberg algebras by using topological graphs, in operator algebra seminars at University of Tokyo, at University of Tokyo.
- September, 9, 2005, Graph algebras, in 40th Functional Analysis meeting (September 9 - 11, 2005) at Kyoto Seminar House.
- September, 21, 2005, Topological graph algebras and groupoids, in Mathematical Society of Japan 2005 Autumn Meeting (September 19 – 22, 2005), at Okayama University.
- October, 24, 2005, Pure infiniteness of  $C^*$ -algebras of topological graphs, in Operator Algebra and Ergodic Theory Seminar, at Kyushu University.
- November, 10, 2005, A method to prove a given  $C^*$ -algebra is purely infinite, in operator algebra seminars at University of Tokyo, at University of Tokyo.
- November, 15, 2005, Generators and relations of Kirchberg algebras, in Operator Theory Operator Algebra Symposium (November 13 – 15, 2005), at Wel Sunpia Okayama.
- February, 13, 2006, Dynamical systems and operator algebras, in The 2nd COE Conference for Young Researchers (February 13 – 16, 2006), at Hokkaido University.