

研究活動報告

北海道大学 大学院理学研究科 数学専攻
学術研究員 笠原 雪夫

1. 研究内容・成果、及び、2006年度研究活動報告

研究内容・成果

定常過程の予測理論に関連する様々な問題に関心があります。特に、有限予測問題と、そこで重要な役割を果たす、偏相関係数という量に興味を持っています。後者は Verblunsky 係数, Szeő 係数, Schur 係数などとも呼ばれ、単位円上の直交多項式の理論においても重要な役割を果たします。定常過程の局所的な自己依存構造に関わる問題は古くから盛んに研究されており、いろいろな解析手法が知られています。私は、通常、大域的な自己依存構造の解析に用いられる Hardy 関数の理論を応用して独自に開発した解析手法を展開しながら、特色のある研究をしたいと考えています。

(1) 有限予測問題

離散時間の定常過程を考える場合、これは、単位円上の重み付き L^2 空間 $H = L^2(d\mu)$ における直交多項式 $\Phi_n(z) = z^n + \text{lower order}$ を求める問題に他なりません。偏相関係数とは $-\overline{\Phi_n(0)}$ のことです。もちろん Schmidt の直交化法を使って、 Φ_n を逐次的に計算することは可能ですが、そこで得られる結果は必ずしも有用であるとは限りません。そこで、次のような手法で Φ_n を近似することを考えました。 H において、 $e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots$ で張られる部分空間 H_1^∞ と $e^{in\theta}, e^{i(n-1)\theta}, \dots$ で張られる部分空間 H_{-n}^∞ の共通部分が、多項式 $\sum_{k=1}^n c_k e^{ik\theta}$ の空間 H_1^n と一致すると仮定します。実は、この条件は、偏角だけで決まる関数 $g \in H^1$ が存在して $d\mu = |g|d\theta$ が成り立つことと同等です。この場合、 H_1^n への射影は、 H_1^∞ と H_{-n}^∞ に、交互に繰返し射影したものの極限と一致するので、 Φ_n をうまく具合に近似できます。これは、予測問題の言葉でいうと、有限の過去の情報を用いた予測を、無限の過去・未来の情報を用いて求める方法と理解されます。この方法のポイントは、 H_1^∞ や H_{-n}^∞ への射影の扱い易さにあるのですが、結果として、 Φ_n の係数やノルムの簡明な表現が得られました。また、その応用として、偏相関係数の精密な漸近公式、長期記憶を持つ定常時系列に対する Baxter 不等式などを証明しました。

連続時間の場合は、Schmidt の直交化法のような手段がないので、有限予測問題を解くこと自体、非常に難しくなります。一般性のある議論はできませんが、上の同様の手法を適用することにより、いくつかの有用な定常 (or 定常増分) 過程に対する有限予測問題を明示的に解くことができました。その結果を応用して、実軸上の重み付き L^2 空間における直交増分を持つ整関数、二階微分作用素の逆スペクトル問題、非マルコフ市場における効用最大化などについて調べました。

(2) 偏角だけで決まる関数

このような関数 $g \in H^1$ は rigid (又は strongly outer) と呼ばれます。上記 (1) の研究から、rigid な関数自身に強い興味を持つようになりました。rigid な関数に対する様々な研究がなされていますが、その構造ははっきりしていないようです。 $g \in H^1$ は、 $g^{1/2} \in \overline{T_{g/|g|}H^2}$ (Toeplitz 作用素 $T_{g/|g|}$ による H^2 象の L^2 閉包) のとき rigid になります。これより強く $g^{1/2} \in T_{g/|g|}H^2$ の場合の、 g の表現が得られました。この表現は、直交多項式と Schur 関数を明示的に関係付けます。

定常時系列に完全非決定性という概念がありますが、これを rigid な関数によって特徴付けることができます。この類似として、多次元定常時系列に対する完全非決定性を考え、それを行列値の rigid な関数で特徴付けました。

(3) 定常過程の標準表現

連続時間の定常 (or 定常増分) 過程の局所的な時間発展構造を解明することは大変興味深い問題です。これに対する解析手段として、Krein による二階微分作用素の固有関数展開の理論から、実軸上の重み付き L^2 空間における直交増分を持つ整関数による展開定理を導出しました。これは、単位円上の直交多項式の連続版に相当するものです。その展開定理から得られる予測公式には、有限、無限の予測問題を同時に扱えるという、従来の方法にはない利点があります。また、別の応用として、定常 (or 定常増分) 過程の局所的な標準表現を決定し、連続重複度が高々 1 であることを示しました。

2006 年度研究活動報告

口頭発表

- 笠原 雪夫
定常過程の予測問題
COE 研究員連続講演会, 北海道大学, 2006 年 7 月
- 笠原 雪夫
Orthogonal polynomials on the unit circle associated with a rigid function
実解析学シンポジウム, 弘前大学, 2006 年 10 月
- 笠原 雪夫
Orthogonal polynomials on the unit circle associated with a rigid function
北海道大学-ソウル大学ジョイントシンポジウム, 北海道大学, 2007 年 2 月

2. 発表論文リスト

- A. Inoue and Y. Kasahara, On the asymptotic behavior of the prediction error of a stationary process, In: Trends in probability and related analysis (Taipei, 1998), 207–218, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999.
- A. Inoue and Y. Kasahara, Asymptotics for prediction errors of stationary processes with reflection positivity, *J. Math. Anal. Appl.* **250** (2000), no. 1, 299–319.
- A. Akihiko and Y. Kasahara, Partial autocorrelation functions of the fractional ARIMA processes with negative degree of differencing, *J. Multivariate Anal.* **89** (2004), no. 1, 135–147.
- V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory. II. Innovation processes and expected utility maximization, *Stoch. Anal. Appl.* **23** (2005), no. 2, 301–328.
- A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, *Ann. Statist.* **34** (2006), no. 2, in press.
- M. Pourahmadi, A. Inoue and Y. Kasahara, A prediction problem in $L^2(w)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- Y. Kasahara, The asymptotic behavior of the prediction error for a continuous-time fractional ARIMA process, submitted.
- Y. Kasahara, Canonical representations of a stationary or stationary-increments Gaussian processes, submitted.
- Y. Kasahara, Finite prediction problem for a stationary process I: Infinitesimal prediction errors, submitted.
- Y. Kasahara, Finite prediction problem for a stationary process II: Innovation process and partial correlation function, submitted.
- Y. Kasahara, M. Pourahmadi and A. Inoue, Multivariate completely non-deterministic stationary processes, preprint.
- Y. Kasahara, Verblunsky coefficients associated with a strongly outer function, preprint.

3. 主たる口頭発表のリスト

- 笠原 雪夫
鏡映正値的定常過程の補外
日本数学会 統計数学科分科会 一般講演, 島根大学, 2002年9月
- 笠原 雪夫
連続時間の Szegő 直交多項式と偏相関関数について
実解析学シンポジウム, 鹿児島大学, 2002年11月
- 井上昭彦, 笠原 雪夫
定常時系列の偏相関関数の表現定理とその応用
日本数学会 統計数学科分科会 一般講演, 東京大学, 2003年3月
- V. V. Anh, 井上昭彦, 笠原 雪夫
新生過程の明示表現と非マルコフ型市場での効用最大化
日本数学会 統計数学科分科会 一般講演, 千葉大学, 2003年9月
- 笠原 雪夫
定常過程の標準表現
実解析学シンポジウム, 山形大学, 2003年11月
- 笠原 雪夫
定常過程の標準表現について
確率過程とその周辺, 金沢大学, 2003年12月
- 井上昭彦, 笠原 雪夫
長時間記憶の定常時系列に対する Baxter の不等式
日本数学会 統計数学科分科会 一般講演, 北海道大学, 2004年9月
- 笠原 雪夫
鏡映正値的定常過程の標準表現
実解析学シンポジウム, 大阪府立大学, 2004年11月
- 笠原 雪夫
定常過程の標準表現について
日本数学会 統計数学科分科会 特別講演, 日本大学, 2005年3月
- 笠原 雪夫
定常過程の予測問題と Verblunsky 係数
確率論シンポジウム, 京都大学, 2005年12月
- 笠原 雪夫
Verblunsky coefficients associated with a strongly outer function
日本数学会 統計数学科分科会 一般講演, 中央大学, 2006年3月
- 笠原 雪夫
Orthogonal polynomials on the unit circle associated with a rigid function
実解析学シンポジウム, 弘前大学, 2006年10月