

2006年度研究活動報告書

北海道大学数学 COE 研究員
平田 賢太郎

研究内容・成果

単位球上の正値調和関数が球面上の或る測度の Poisson 積分で表されることは広く知られている．一般領域への拡張は 1941 年に Martin により成された．しかし，積分するところは理想境界 (Martin 境界) 上であり，積分核 (Martin 核) も領域に依存して決まる．与えられた領域上の正値調和関数全体の構造を知る為には Martin 境界を明らかにする必要がある．論文 [1] では，John 領域という複雑領域の各位相境界点上の極小 Martin 境界点の個数に対する評価および同じサイズの開凸集合の和で表される有界領域の Martin 境界が位相境界と一致する為の十分条件を与えた．擬双曲距離の評価と劣調和関数の増大評価を組み合わせ Carleson 型評価を証明し，更に箱議論を用いて弱境界 Harnack 原理を導き，上記結果の証明を与えた．また，Carleson 型評価を応用し，調和測度が doubling 条件を満たす為の領域に対する必要かつ十分な幾何学的条件を論文 [8] で与えた．論文 [4] では，2 つの交わる任意の領域の各々の Martin 核の比に対する境界挙動を 2 つの差集合のポテンシャル論的サイズ (極小尖細性) を考慮し完全に調べた．更に，Lipschitz 領域の Martin 核の極付近での増大度の研究に応用し，「領域の形状に関する或る積分の収束・発散」と「Martin 核の増大が或るオーダーより速いか否か」の相互関係を示した．この研究を動機に，一様領域の Green 関数と Martin 核の積が局所的に具体的な関数で評価できることを見出し，Green 関数の境界減衰度と Martin 核の極付近での増大度の関係を論文 [5] で与えた．以上の内容についてポテンシャル論国際研究集会で発表し，特に 2 次元のときは境界点ごとに評価の形が変わることを会議録 [2] で例示した．論文 [3] では，複雑な境界をもつ錐領域において Green 関数に対する大域的評価を確立し，一般化 Kato 族を導入し性質を調べることで，可測関数 μ, f に弱い条件を仮定のもと非線形楕円型方程式 $\Delta u - \mu u = f(x, u)$ の正値解で無限遠点に極をもつ Martin 核 (線形方程式の解) と比較可能なものの存在を示した．論文 [7] では，滑らかな有界領域において，非線形不等式 $0 \leq -\Delta u \leq u^p$ ($p > 0$) を満たす正値優調和関数に対する境界増大評価 $u(x) \leq c \text{dist}(x, \partial\Omega)^{1-n}$ および $-\Delta u = u^p$ の正値解で境界に極をもつ Martin 核と比較可能なものの存在を調べた．いずれの場合も， $(n+1)/(n-1)$ が p の上限になっていることを発見した．論文 [6] では，全空間上の Helmholtz 方程式の (正規化された) 正値解の無限遠方での極限の存在および非存在について調べた．つまり，調和関数の境界挙動に関する Fatou 定理と Littlewood 定理を Helmholtz 方程式の正値解の場合に研究した．

論文

1. Hiroaki Aikawa & K. Hirata & Torbjörn Lundh, *Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets*, J. Math. Soc. Japan, vol. 58, no. 1, pp. 247-274, (2006)
2. K. Hirata, *Martin kernels of general domains*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 44, pp. 145-154, (2006)
3. K. Hirata, *Sharp estimates for the Green function, $3G$ inequalities, and nonlinear Schrödinger problems in uniform cones*, J. d'Analyse Math., vol. 99, pp. 309-332, (2006)
4. K. Hirata, *Boundary behavior of quotients of Martin kernels*, to appear in Proc. Edinburgh Math. Soc.
5. K. Hirata, *Estimates for the products of the Green function and the Martin kernel*, to appear in Nagoya Math. J.
6. K. Hirata, *Boundary behavior of solutions of the Helmholtz equation*, to appear in Canad. Math. Bull.

プレプリント

7. Hiroaki Aikawa & K. Hirata, *Doubling conditions for harmonic measure in John domains*, Hokkaido Univ. Preprint Series in Mathematics #796
8. K. Hirata, *The boundary growth of superharmonic functions and positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Hokkaido Univ. Preprint Series in Mathematics #814

主たる口頭発表 6 件 (他 5 件)

1. 2つの領域の Martin 核たちの商に対する挙動, 日本数学会函数論分科会, 中央大学, 2006年3月26日
2. Helmholtz 方程式の解の境界挙動, 第41回函数論サマーセミナー, 兵庫県立先端科学技術支援センター, 2006年7月29日
3. 非線形楕円型不等式の正值解の境界増大度, 実解析学シンポジウム2006, 弘前大学, 2006年10月29日
4. On the boundary growth of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities, Finland-Japan Joint Seminar on Analysis, 広島大学, 2006年12月12日
5. On the boundary growth of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities, RIMS 研究集会「ポテンシャル論とその関連分野」, 京都大学数理解析研究所, 2006年12月19日
6. 非線形楕円型方程式の正值解の存在と境界増大評価, 2006年度ポテンシャル論研究集会, 千葉大学, 2007年1月11日