

2005年度研究活動報告書

北海道大学数学 COE 研究員
平田 賢太郎

研究内容・成果

John 領域における Martin 境界点の個数の評価・Green 核や Martin 核の挙動・ある非線形 Schrödinger 方程式の正值解の存在等を研究した。

Martin 境界の研究の重要性は正值調和関数の積分表現 (解の構造) にあり, 60 年以上に亘り様々な領域において研究されてきた。位相境界が Martin 境界点と一致することもあれば, 1つの位相境界点に無限個の極小 Martin 境界点が存在する領域もある。John 領域はこれまで研究されてきた殆ど全ての領域を包含する一般的な領域であり, 従来の方法は適用できない。そこで, 擬双曲距離を用いた N -局所参照点系という概念を導入することで, 境界付近における正值調和関数の挙動がコントロールできること (Carleson 型の評価・弱型境界 Harnack 原理の成立) がわかり, John 領域の各位相境界点上の極小 Martin 境界点の個数が高々有限 ($N \leq 2$ のときは高々 2 個) であることを示した。更に, John 領域の中でもほぼ同じ大きさの開凸集合の和で表される有界領域の Martin 境界が位相境界と同相になること, John 錐の頂点における Martin 境界点が唯一であることを示した ([2], [5])。

複素平面内の Lipschitz 領域における正則関数の角微係数問題に関係して, Burdzy, Carroll, Gardiner 等により固定した点に極をもつ Green 核の法線方向の減衰が境界までの距離関数より速いか遅いかの判定条件が与えられた。このことを動機に Martin 核に対して類似の結果を得た ([3])。具体的には, 彼等と同じ判定条件のもとで Martin 核の極付近での法線方向の増大が境界までの距離関数の $1-n$ 乗より早いか遅いかを示した。重要な点は一方が他方に含まれている 2つの領域の共通の境界点において差集合の大きさから其々の領域の Green 核 (Martin 核) の挙動が関係付けられるかにある。Green 核は領域に関して単調であり, 差集合が小さいと双方は同じ速さで減衰することが 1957 年に Naïm により示された。Martin 核は単調性を有しないが, 差集合が小さいときは其々の領域の Martin 核は同じ速さで増大し, 大きいときは内側の領域の Martin 核の方が速く増大することを見出し, 解決へと至った。この特徴付けは一般領域に対して示すことができ, その結果, 任意の 2つの領域を与えたときに共通の境界点において其々の領域の Martin 核の比の挙動がどの様に変化するかを差集合の極小尖細性を考慮して決定付けることができた。また, Burdzy 等による Green 核の減衰の結果と上記結果を動機に, John 領域の 1-局所参照点系をもつ境界点において Green 核の減衰度と Martin 核の増大度を関係付ける比較評価を発見した ([4])。

1960 年代より単位球や全空間において非線形楕円型方程式 $\Delta u = f(x, u)$ の正值解の存在が研究されてきた。常微分的方法で球対称解の存在が示されてきたが, この方法では角をもつ領域には適用できない。近年, Zhang-Zhao は有界 Lipschitz 領域上の定常 Schrödinger 方程式の確率解析の研究において得られた 3 G 不等式

と呼ばれる Green 核に対する評価を用いることで, Kato 族に属する非線形項に対して一点で $2-n$ 乗の特異をもつ正値解が無限個存在することを示した. この方法を取り入れ, 一様錐という非有界領域において無限遠点の Martin 核と同じ振る舞いをする正値解が無限個存在することを示した ([6]). $3G$ 不等式は有界領域で多く研究されてきたが, 非有界領域ではあまりない. 本研究では, $3G$ 不等式より強力な Green 核の大域的評価を与えた. つまり, 一様錐の Green 核は無限遠点の Martin 核を用いて大域的に評価できることを示した. その結果, 従来のものより強力な $3G$ 不等式を導くことが可能になり, それによって定義される関数族 (Kato 族より少し広い) に属する非線形項に対して議論した.

論文

1. K. Hirata, *Sharpness of the Korányi approach region*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 133, no. 8, pp. 2309–2317, (2005)
2. Hiroaki Aikawa, K. Hirata and Torbjörn Lundh, *Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets*, Journal of the Mathematical Society of Japan, vol. 58, no. 1, pp. 247–273, (2006)
3. K. Hirata, *Boundary behavior of quotients of Martin kernels*, to appear in Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society

プレプリント (Hokkaido Univ. Preprint Series in Math.)

4. *Comparison estimates for the Green function and the Martin kernel*, #726
5. *Martin boundary points of cones generated by spherical John regions*, #727
6. *Sharp estimates for the Green function, $3G$ inequalities, and nonlinear Schrödinger problems in uniform cones*, #735

口頭発表

1. Poisson-Szegö 積分の境界挙動, 北海道大学偏微分方程式セミナー, 北海道大学, 2005 年 4 月 18 日
2. John 的境界をもつ錐の Martin 境界点とその部分錐内の極小尖細集合, ポテンシャル論 2005, 愛知工業大学, 2005 年 6 月 11 日
3. ある非線形楕円型方程式の無限遠点に極をもつ正値解の存在—ポテンシャル論的観点より—, 第 27 回発展方程式若手セミナー, 松江市, 2005 年 8 月 24 日
4. 一様錐領域における Green 関数の評価と $3G$ 不等式とその応用, 第 48 回函数論シンポジウム, 鹿児島大学, 2005 年 10 月 9 日 (招待講演)
5. 一様錐領域における Green 関数の評価と非線形 Schrödinger 方程式の正値解の存在, ポテンシャル論研究集会, 大同工業大学, 2005 年 11 月 4 日
6. A global estimate for the Green function in a non-smooth domain, 北海道大学月曜解析セミナー, 北海道大学, 2005 年 11 月 14 日
7. Estimates for the Green function and applications, The Ninth Conference on Real and Complex Analysis (Korea-Japan), 広島大学, 2005 年 12 月 15 日