

# 研究内容・成果, 及び, 2007年度研究活動報告

## 研究内容・成果

私の研究テーマは, 混標数  $(0, p)$  の局所体  $K$  上の幾何学的な  $p$  巾 torsion Galois 表現である.  $X$  を  $K$  上 proper smooth な代数多様体で, 整数環  $\mathcal{O}_K$  上 proper semi-stable model を持つものとする.  $X$  の etale cohomology 群  $H_{\text{et}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})$  や,  $p$  進 etale cohomology 群  $H_{\text{et}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  には自然に  $K$  の絶対 Galois 群  $G_K$  が作用する.  $K$  上の幾何学的な  $p$  巾 torsion Galois 表現とは, これらから得られる  $p$  巾 torsion  $G_K$  表現のことである. その代表的な例としては,  $\mathcal{O}_K$  上の有限平坦群スキーム  $\mathcal{G}$  の  $\bar{K}$  値点として得られる torsion  $G_K$  表現  $\mathcal{G}(\bar{K})$  が挙げられる (このような表現を有限平坦であるという).

一般に, 代数体の Galois 表現の研究には自然に絶対不分裂とは限らない局所体が見れるが, 絶対分岐のもとでは, 局所体の torsion Galois 表現には素元の持つ情報量に対応した絶対不分裂の場合にはない独特の困難が生じる. 私の研究目的は, 絶対分岐のもとでも torsion Galois 表現の詳細構造を調べるための新しい方法を確立することである.

私のこれまでの研究は, 幾何学的 torsion Galois 表現の中で最も基本的な,  $\mathcal{O}_K$  上の有限平坦群スキームから得られる Galois 表現について, これを調べるための分岐指数によらない方法の模索に充てられた. その結果, Abbes と斎藤による有限平坦完全交差代数の分岐理論によって, 有限平坦表現の分岐やその半単純化を幾何的手法で記述できることが分かった.

まず,  $p^n$  で消える有限平坦表現の分岐が  $e(K)(n + 1/(p - 1))$  で抑えられることを証明した (発表論文リスト [1]). 但し  $e(K)$  は  $K$  の絶対分岐指数. これは剰余体完全の場合は Fontaine の定理であり, 私の結果はその剰余体一般への拡張である.

第二に, 有限平坦表現の半単純化に現れる, 従順分岐指標の巾指数が, 表現を与える有限平坦群スキームの形式群への埋め込みに沿った認容ブローアップの様子で記述できることを示した (発表論文リスト [3]). このことは,  $\mathcal{O}_K$  上の有限平坦群スキームを分類する Breuil の Dieudonné 加群のある種の係数拡大との両立性を示すことで, 特別な場合については前にも確かめることが出来ていた (発表論文リスト [2]). 有限平坦群スキームの affine 環が単生成である場合, その Galois 表現の半単純化が affine 環の定義方程式の Newton 多角形で記述できるという古典的事実があるが, 私の結果はその高次元化に当たる.

## 2007年活動報告

今年度の研究は, これまで有限平坦表現に対して行って来た研究の, 有限平坦と限らない幾何学的 torsion Galois 表現への一般化のための試行錯誤に費された. Sen の定理によれば,  $G_K$  の  $p$  進表現から得られる  $p^n$ -torsion 表現の分岐はほぼ  $ne(K)$  で近似できるが, 特に  $X$  を  $K$  上 proper smooth な代数多様体で  $\mathcal{O}_K$  上 semi-stable model を持つようなものとするとき,  $X$  の  $p$  進 etale cohomology 群  $H_{\text{et}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$  が

ら得られる  $p^n$ -torsion 表現の分岐については, Sen の評価からの誤差項が  $r$  に応じた bound を持つと予想されている. このような分岐の bound は,  $K$  が絶対不分岐 (で剰余体完全) な場合には, 80 年代に Fontaine と Abrashkin によって独立に証明され, 代数体の discriminant bound と組み合わせることで, 代数体上の代数多様体である程度よい還元を持つものが「それほどない」というタイプの主張を導いていた.

今年度はこの種の torsion Galois 表現の分岐の bound を, 絶対分岐 (で剰余体完全) の場合に調べる研究を行った. その結果,  $r < p-1$  ならば, 上のような  $X$  の  $r$  次  $p$  進 etale cohomology 群から得られる mod  $p$  表現の分岐が  $1 + e(K)(1 + r/(p-1))$  で抑えられることが証明できた (発表論文リスト [4]).

## 発表論文リスト

- [1] **S. Hattori:** *Ramification of a finite flat group scheme over a local field*, J. of Number Theory **118** (2006), no.2, 145-154
- [2] **S. Hattori:** *Ramification and tame characters of a finite flat representation of rank two*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **4** (2007), 153-164
- [3] **S. Hattori:** *Tame characters and ramification of finite flat group schemes*, to appear in J. of Number Theory
- [4] **S. Hattori:** *On a ramification bound of semi-stable mod  $p$  representations over a local field*, submitted, available at [arXiv:0801.2149](https://arxiv.org/abs/0801.2149)

## 主たる口頭発表のリスト

- [1] Ramification of  $p$ -power torsions of an elliptic curve over a local field, 代数学コロキウム, 東京大学数理科学研究科, 2004年12月1日
- [2] Ramification of  $p$ -power torsions of an elliptic curve over a local field, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2004年12月9日
- [3] Ramification of a finite flat group scheme over a local field, 中央大学モジュライセミナー, 中央大学, 2005年6月6日
- [4] Tame characters and ramification of finite flat group schemes, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2006年12月14日
- [5] Tame characters and ramification of finite flat group schemes, 第一回堀場シンポジウム・ $p$ -adic Aspects in Arithmetic Geometry, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2007年6月7日
- [6] Tame characters and ramification of finite flat group schemes, Of ramification and Vanishing Cycles, 東京大学数理科学研究科, 2007年9月10日
- [7] 分岐理論と有限平坦 Galois 表現, COE 連続講演, 北海道大学, 2007年12月3,5,6日
- [8] Crystalline Dieudonné 理論, 最近の変形理論の現状について, 広島大学, 2008年2月27日
- [9] 有限平坦群スキームの分類とガロア表現の枠付き変形 I, 最近の変形理論の現状について, 広島大学, 2008年2月28日