研究成果報告

特異点の研究に当たって，指数を小さくしてよりたちの良い特異点に還元することは重要な要素である．例えば2次元標数0で，商特異点は，指数1被覆をとることで標準特異点に還元される．標数が小さい場合では，現在までに幾つかの反例が知られており，上手く機能しないことが解っている．これまで解っている成果は以下の通りである．Sを正規曲面，$\varDelta$をその上の境界で，組$(S, \varDelta)$が対数的端末特異点を持つとする．

事実 1. 標数5以上の場合，$\varDelta$が被約の場合，指数1被覆は標準特異点になる（すなわち肯定的な，標数0と同様の結果である）．標数2及び3の場合，実際に反例が構成出来る．

以上は川又雄二郎氏の結果である．

定理 2. 標数3以上，Sが滑らかで$\varDelta$が標準境界の場合，肯定的である．標数2の場合，Sが滑らかでも反例が存在する．反例となる標準境界$\varDelta$は分類されている．

以上が筆者の過去の結果である（論文リスト 1.）．これに引き続き，以下の問題を考えた．

問題 3. 指数1被覆が標準特異点より悪い，すなわち反例の場合について，厳密にどのくらい悪いのか？

具体的には$\varDelta$は27通りに分類され，そのうち5通りが反例となっている．それぞれの場合の指数1被覆の定義方程式の標準形を確定した．それらは大きく2種類に分類される．その両方について具体的に食い違い係数を計算でき，全てが対数的標準特異点より悪い特異点であることが判った．注目すべきはちょうど対数的標準特異点になる場合が現れない点である．(論文リスト 2.)

上記の通り正標数における2次元正規特異点の研究が不可欠であるが，現段階では正標数の対数的端末特異点や対数的標準特異点に関してはあまり良く知られてはいない．標数が0の場合は対数的端末特異点は商特異点であるが，正標数では必ずしもそうとは限らないし，単純楕円型特異点の標準形などについても正標数に関してはごく最近判ってきたばかりである．そのため，現在ではこの方面の研究も行っている．正標数2次元正規特異点のうち特に超平面特異点に焦点を絞り，次の問題を考える．

問題 4. 特異点の性質を，その方程式からどの程度知ることが出来るか．

現在までに以下のことが知られている：

事実 5.

- 標数 0 の有理 2 重点，超平面単純楕円型特異点は擬斉次多項式で表され，その重みで特異点の型が判別出来る．
- 正標数の有理 2 重点の場合，特異点の型を X_n^r とすると X, n は重みで判別出来る．
- 正標数の超平面単純楕円型特異点は擬斉次多項式で表される．

これに加え，以下を示した．(論文リスト 4.)

定理 6. 正標数の超平面単純楕円型特異点は，その重みで型が判別出来る．すなわち

$$\widetilde{\mathrm{E}}_6 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \widetilde{\mathrm{E}}_7 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),\ \widetilde{\mathrm{E}}_8 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

以下はこれらの結果の応用である．

超特異 K3 曲面とは Picard 数が 22 の K3 曲面で，その存在は正標数特有の現象である．近年格子理論を用いる手法でその性質が調べられ，例えば標数 2 では以下のようなことが知られている．

事実 7. 任意の超特異 K3 曲面は，21 個の通常 2 重点を持つ 6 次曲線で分岐する $\mathbb{P}^2$ の純非分離 2 重被覆と双有理同値である．

島田伊知朗氏の結果である．更にこの構成方法に対し島田氏は予想を立てた．

予想 8. 純非分離 2 重被覆で構成される超特異 K3 曲面の特異点は有理 2 重点で，その型は A_1, D_{2n}, E_7, E_8 に限る．

筆者は 6 次曲線の半安定性を調べる手法を中心に，上記の重みで判別する手法を一部用いることで，この予想を肯定的に解決した．(論文リスト 5.)

定理 9. 特異点は有理 2 重点の A_1, D_{2n} $(2 \leqq n \leqq 9)$, E_7, E_8 型に限る．

2005 年度研究活動

9月　Singularity theory and commutative algebra（於静岡）聴講

１０月　代数幾何学城崎シンポジウム　聴講

１１月　代数幾何ミニワークショップ（於東北大学）にて口頭発表

１２月　代数幾何セミナー（於九州大学）にて口頭発表

１２月　Algebraic geometry and beyond（於京都大学）　聴講

1月　可換環論セミナー（於札幌）　聴講

２月　第２回ＣＯＥ数学総合若手研究集会（於北海道大学）にて口頭発表

２月　代数・解析・幾何学セミナー（於鹿児島大学）　聴講

３月　代数学若手研究集会（於名古屋大学）　聴講

論文リスト

1. On index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities in positive characteristic

   Mathematische Zeitshrift 247 (2004), pp 432–440

2. On exceptions of index one covers of two-dimensional plt singularities in characteristic two

   submitted

3. 極小モデルプログラムの入門，及びその正標数への拡張

   北海道大学考究録 #93

4. Recognition principle of normal surface singularities in positive characteristic

   in preparation

5. Rational double points on supersingular K3 surfaces in characteristic two

   in preparation

講演リスト

(1) On index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities in positive characteristic

　２００１年１０月６日　日本数学会秋期総合分科会（於九州大学）

(2) 標数３以上の体上の標準境界付純対数的端末特異点の指数１被覆

　２００２年９月２６日　日本数学会秋期総合分科会（於島根大学）

(3) 正標数の体上の標準境界付純対数的端末特異点の指数１被覆

２００４年３月２日 代数幾何小研究集会（於埼玉大学）

(4) 極小モデルプログラムの入門，及びその正標数への拡張

２００４年６月４日，１１日 COE 連続講演会（於北海道大学）

(5) On exceptions of index one covers of two-dimensional plt singularities in characteristic two

２００４年９月１９日 日本数学会秋期総合分科会（於北海道大学）

(6) On index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities in positive characteristic

２００５年１月３１日，２月１日 特異点セミナー（於日本大学）

(7) Recognition principle of normal surface singularities in positive characteristic

２００５年１１月８日 代数幾何ミニワークショップ（於東北大学）

(8) On counterexamples of index one covers of two-dimensional purely log terminal singularities

２００５年１２月９日 代数幾何セミナー（於九州大学）

(9) Recognition principle of normal surface singularities in positive characteristic

２００６年２月１３日 第２回ＣＯＥ数学総合若手研究集会（於北海道大学）