

研究内容・成果, 及び, 2004年度研究活動報告

研究内容・成果

有限次元ベクトル空間上の行列の作用を, 無限次元ヒルベルト空間上の有界線形作用素へと拡張することにより, 作用素が構成する多様な環構造が考えられる. 作用素環論は, こうした構造の解析を目的として始められ, 現在も発展を続けている. その中でも, Murray-von Neumann によって研究が始められたフォン・ノイマン環は, 代数的性質と位相的性質の両方から特徴づけられる興味深い作用素環として, 注目されてきた.

私は, (行列環における対角行列にあたる) カルタン部分環をもつフォン・ノイマン環の解析を中心に, 測度論的な視点を用いた研究を行なっている. 任意のフォン・ノイマン環 A とそのカルタン部分環 D に対して, ある測度空間 (X, μ) 上の可算同値関係 \mathcal{R} およびその上の“ねじれ” σ が存在して, A は同値関係 \mathcal{R} で添字づけられた“行列” $W^*(\mathcal{R}, \sigma)$ に, D はその“対角行列” $W^*(X)$ にそれぞれ同型となる.

私が得た結果の中で特筆すべきものは, 長年の未解決問題であった, 部分環の特徴づけに成功したことである.. つまり, 以下のような部分フォン・ノイマン環と部分同値関係の“ガロア対応”が存在していることを証明した (発表論文 2).

$$(W^*(X) \subseteq N \subseteq W^*(\mathcal{R}, \sigma)) \longleftrightarrow (X \subseteq S \subseteq \mathcal{R}).$$

更に, この結果をもとに, カルタン部分環に関わる, 量子群のフォン・ノイマン環への作用の解析を行なった. 量子群の作用とは一般の群の作用を一般化したものである. 私は測度空間の観点から量子群の作用をとらえることによって, その作用によって派生する作用素環をも測度空間の視点で解析を行うことに成功した. すなわち, 不動点環が測度空間で記述できるような, あらゆる量子群の作用は, 1-コサイクルと呼ばれる測度空間上の関数と深く関わっていることが判明した. 実際, 以下の定理を得ることができた (発表論文 3).

量子群の作用と, 測度空間上の 1-コサイクルの間に 1 対 1 の対応が存在する.

2004 年度研究活動報告

今年度の主な研究活動は, 測度空間上の 1-コサイクルの議論を用いた, フォン・ノイマン環とその作用による不動点環の解析である. (発表論文 3) によって, フォン・ノイマン環 A 上の作用 α が A カルタン部分環 D 上で自明に作用するとき, α は測度空間上の 1-コサイクル c によって特徴づけられている. このとき, 組 $A^\alpha \subseteq A$ には, 測度空間上の同値関係-部分同値関係の組 $S \subseteq \mathcal{R}$ が対応し, 部分同値関係 S は 1-コサイクル $c: \mathcal{R} \rightarrow K$ の核 $\text{Ker}(c)$ に等しい.

一方, 測度空間上の同値関係においては, 群の理論を一般化した, normality の理論が存在していた. そこで, 1-コサイクル c を解析することによって, 同値関係の normality の議論を, 対応する作用素環のものに応用することを試みた. 実際, 可換とは限らない部分フォン・ノイマン環 $B \subseteq A$ に対して, vBv^* , v^*Bv が共に B に入るような部分等距離作用素 v を考えると, これは B を “normalize” するものと考えることができる. このような集合を, B の A における normalizing groupoid $\mathcal{GN}(B)$ として新たに定義した.

すると, 不動点環 A^α が因子環である場合, 対応する部分同値関係 $\text{Ker}(c)$ が \mathcal{R} で normal であることは, normalizing groupoid $\mathcal{GN}(A^\alpha)$ が A を生成することに同値であることが判明した. 更にこの条件は, 対応する作用 α が可算群の余作用から来ることと同値であることも示された (発表論文 4).

$$\begin{aligned} \text{Ker}(c) \subseteq \mathcal{R}: \text{ergodic normal subrelation} \\ \iff \mathcal{GN}(A^\alpha)'' = A \quad (A^\alpha = A^{\alpha_c} \text{ is a factor}) \\ \iff \alpha = \alpha_c: \text{minimal coaction of a discrete group} \end{aligned}$$

今後の研究では, 非可算群に関する 1-コサイクルおよび作用の解析や, AFD III 型因子環といった具体的な対象に対して 1-コサイクルによって決まる不動点環の解析を進めることにより, 部分同値関係自体の分類を行うことを目標としたい.

発表論文リスト

1. 青井久, 山ノ内毅彦 (北海道大学理学研究科数学助教授), *Construction of a canonical subfactor for an inclusion of factors with a common Cartan subalgebra*, Hokkaido Mathematical Journal **32** (2003), 41–58.
2. 青井久, *A construction of equivalence subrelations for intermediate subalgebras for an inclusion of a von Neumann algebra and a Cartan subalgebra*, J. Math. Soc. Japan, **55** (2003), 713–725.
3. 青井久, 山ノ内毅彦 (北海道大学理学研究科数学助教授), *A characterization of coactions whose fixed-point algebras contain special masas*, Ergodic theory and dynamical systems (査読中).
4. 青井久, 山ノ内毅彦 (北海道大学理学研究科数学助教授), *On the normalizing groupoids and the commensurability groupoids for inclusions of factors associated to ergodic equivalence relations-subrelations*, Preprint.

主たる口頭発表のリスト

- Construction of a canonical subfactor for an inclusion of factors with a common Cartan subalgebra, (2001年5月21日, 北海道大学月曜解析セミナー)
- Construction of a canonical subrelation for an inclusion of ergodic equivalence relations, (2001年8月14日, 第36回関数解析セミナー)
- 部分 von Neumann 環と部分同値関係の Galois 対応について, (2002年5月13日, 北海道大学月曜解析セミナー)
- 部分 von Neumann 環の normalizer について, (2002年7月31日, 8月1日, 第37回関数解析セミナー)
- A Galois correspondence between intermediate subalgebras and equivalence subrelations, (2002年9月11日, 数理解析研究所 研究集会 作用素環の構造研究とその応用)
- 共通の Cartan 環をもつ因子環の接合積による表示について, (2002年9月28日, 日本数学会 2002年度秋期総合分科会)
- A characterization of coactions whose fixed point subalgebras contain Cartan subalgebras, (2003年5月26日, 北海道大学月曜解析セミナー)
- Coactions which fixes Cartan subalgebras, (2003年12月13日, 関西作用素環セミナー)
- Bimodules over Cartan subalgebras with coactions, (2004年6月7日, 北海道大学月曜解析セミナー)
- A characterization of coactions which fix Cartan subalgebras, (2004年9月1日, 数理解析研究所 研究集会 作用素環とその周辺)
- 不動点環がカルタン部分環を含む作用の解析について, (2004年9月20日, 日本数学会 2004年度秋期総合分科会)