

# 2007年度研究成果報告

北海道大学大学院 理学研究院 COE 学術研究員  
阿部 拓郎

## 1 研究内容・成果及び2007年度研究活動報告

私の主な研究対象である超平面配置とは、体上のベクトル空間内の超平面の有限族である。この極めてシンプルな幾何学的対象に対しては、組み合わせ論、位相幾何学、代数幾何学などからの様々な数学的アプローチが存在する。その中でも超平面配置に接するベクトル場のなす対数的ベクトル場は、寺尾宏明や Sergey Yuzvinsky らによって様々な研究が行われている代数、代数幾何学的対象である。対数的ベクトル場が自由加群となると、超平面配置は自由であるといい、超平面配置の中でも非常に良い性質をもつものとして研究が進んでいる。例えば自由な超平面配置は、超平面配置の組み合わせ論、あるいは複素数体上で考えた際の補集合のトポロジーを調べる際に威力を発揮する、超平面配置の研究には欠かせない対象である。

私はこの対数的ベクトル場の自由性、及びその代数幾何学的な観点からの研究を行っており、最終的には寺尾予想と呼ばれる、本分野における最重要未解決問題へのアプローチを試みたいと考えている。

以下、2007年度に得られた結果について、いくつかに分けて詳述する。

### 1.1 二次元多重配置の exponents の挙動の解析 [論文 (xii)]

超平面配置に対して、その各超平面に正整数の重複度を乗せたものを多重配置と呼ぶ。多重配置は二十年ほど前に Ziegler が導入した概念であるが、その重要性はなかなか認識されていなかった。これに対し吉永正彦は近年、超平面配置の自由性と、多重配置の自由性 (Ziegler restriction) を代数幾何学的手法を用いて関連付けることに成功した。さらに、構造が非常に難しかった多重配置の対数的ベクトル場の解析のために、私と寺尾宏明、および Max Wakefield は論文 (vii) と (viii) においてそれぞれ、特性多項式と加除定理を導入することに成功した。この二つの論文により、多重配置の自由性の研究は、たとえば私の論文 (ix) が象徴するように、着々と進展を遂げている。しかしながら、いまだ未知の領域の多い研究分野であることは疑いなく、今後ますますの発展とブレイクスルーが期待されている。

さて、多重配置と超平面配置の自由性における最大の違いの一つに、二次元多重配置の exponents の挙動があげられる。すなわち、どちらの場合でも二次元ならば自由であることは共通しているが、その exponents、基底の次数の様相はかなり異なる。超平面配置であれば exponents は  $(1, |A| - 1)$  という形をとるが、多重配置の場合は特別な場合を除いて exponents は計算できない。この事実は、上述したようにわれわれによって導入された加除定理の適用範

困を狭める結果ともなっており、多重配置研究における大きな問題の一つである。

これに対して私と沼田泰英は、超平面配置を固定し、その上の重複度全体の集合からなる格子（重複度格子）を考え、その組み合わせ論的挙動から exponents の差という値を考察する、という研究を行った。結果として論文 (xii) において、重複度格子における exponents の差の、きわめて特徴的な振る舞いを発見することに成功した。応用として、あるコクセター型多重配置の基底の次数の新たな算出方法を考案し、これを上述の加除定理に適用することを可能とした。また今後、コクセター型多重配置の自由性を考える際の Euler 重複度計算への幅広い応用も期待されている。

## 1.2 準定数重複度をもつ多重コクセター配置の自由性と原始微分同型 [論文 (xiii)]

超平面配置の代数的側面の研究は、齋藤恭司によるコクセター配置の自由性の証明、および原始微分を用いたコクセター群作用による商空間への Hodge filtration や平坦構造の導入に端を発する。以来、コクセター配置の研究は自由性のみならず位相幾何や組み合わせ論など、すべての超平面配置研究の中心的対象であった。よって、多重コクセター配置の自由性が重要な問題となることは、自然な帰結であるといえる。

この分野については、上述した加除定理を用いた研究方針が現在新たなる主流となりつつあるが、それ以前は齋藤恭司の原始微分の理論を適用する方法が中心であった。原始微分を用いた考察はコクセター配置に対してのみ可能であり、加除定理よりも適用範囲が限られている反面、具体的に基底を構成できるという強力なメリットがある。同時に原始微分が元来、コクセター群作用による商空間の幾何学と深く結びついており、結果として多重自由配置の幾何学や双対性を発見することが出来るという特徴もあった。

原始微分を用いた多重自由配置研究は Solomon-寺尾に端を発し、寺尾による定数重複度への一般化を経て、吉永による偶数定数重複度  $2k$  と奇数定数重複度  $2k + 1$  の間にある重複度の特徴づけまで到達していた。他方、定数重複度  $2k + 1$  と  $2k + 2$  の間については同様の理論が適用できないという問題点があった。これに対し私は、 $A_\ell$  型のコクセター型配置に関して重複度  $2k$  を中心とし、 $2k \pm m$  ( $m : A_\ell \rightarrow \{0, 1\}$ ) を考えその自由性を調べるという実験を行ったところ、これらの自由性は同値であることが解った。この実験結果を元に吉永正彦と私は、重複度  $2k - m$  に対して原始微分理論の適用を試み、結果として論文 (xiii) において、コクセター配置  $\mathcal{A}$  に対して、 $(\mathcal{A}, 2k + m)$  と  $(\mathcal{A}, 2k - m)$  は互いに双対な対数的ベクトル場を（それらが自由でなくとも）与えることを証明した。これはコクセター配置の場合に存在していた、対数的ベクトル場と対数的微分形式の双対性の、原始微分による自然な多重化と捉えることが出来る。また原始微分を用いた準定数重複度の自由性の分類という一つの到達点を得た結果とも言えるだろう。

### 1.3 組み紐配置の自由性と二色除去型グラフ [論文 (xiv)]

先述の通り、コクセター型配置の自由性は重要かつ、困難な問題である。しかしながらコクセター配置は超平面配置研究の基礎を成す重要な対象であり、この上の自由性の研究は何よりもまず推進されねばならない。準定数重複度の自由性の分類は、吉永正彦との共同研究において、一通り決着を見ている。だがここで注意する必要があるのは、吉永との共同研究で示したことと、それに対してどのような重複度が自由になるかを明示的に書き下すことは別の問題である、ということである。この問題に答えることは、吉永と私の結果を用いると、コクセター配置の部分配置すべてを考え、その自由性を完全に分類することに他ならず、これはおよそ実現不可能と思えるほどに困難な問いである。

これに対して肯定的な結果を与えているもっとも有名な例が、 $A_\ell$  型に対する Stanley の結果である。 $A_\ell$  型の部分配置に対しては、あるグラフとの一対一対応をつけることが出来、Stanley はこのグラフが chordal であることと、対応する部分配置が自由であることの同値性を示した。これは超平面配置の理論においても、代数構造が組み合わせ論によって非常に美しく記述されている一例と思われる。

昨今の多重自由配置研究の進展を鑑みれば、これを多重配置へ応用しようとするのはごく自然である。 $A_\ell$  型の配置には、昨年度私が寺尾宏明及び Max Wakefield らと示した加除定理の適用及び特性多項式の計算が比較的上手く行くことから、この上の重複度の自由性を、準定数重複度より一般化した形で考えることを、私は思い立った。すなわち、 $m$  を  $A_\ell$  型のコクセター配置上の重複度で、値として  $\pm 1, 0$  をとるものとし、重複度  $2k + m$  を考え、どの重複度が多重配置を自由にするかの完全分類を試みた。

そのための手法として、私は Stanley が用いていたグラフを拡張し、辺が二色の色を持つことを許すものを考えるというアイデアを導入した。すなわち一つの色は重複度を増す操作に対応し、もう一つの色は重複度を減らす操作に対応することとするのである。この二色グラフ  $G$  を用いることで、上述した重複度  $m_G$  との一対一の対応がつく。問題は、どのようなグラフが自由な多重配置に対応しているかを探ることであった。二色グラフは先行研究がほとんどなく、考察が極めて難しいものであった。

そこで私は、表現論や組み合わせ論に詳しい北海道大学の沼田泰英、及び産業技術総合研究所の縫田光司に助力を仰ぎ、共同研究を開始した。結果として、二色グラフに対して bicolor-eliminable という概念を見出し、これが一色グラフの場合の chordal の拡張になっていることを、縫田による独自の研究とあわせて見出すことに成功した。結果として我々は、 $A_\ell$  型のコクセター配置上の重複度  $2k + m_G$  が自由であることと、 $G$  が bicolor-eliminable であることの同値性を証明することが出来た。

これは上述のタイプの重複度の自由性の完全分類であり、きわめて強力な結果である。同時に、統計や組み合わせ論で頻繁に登場する chordal グラフ

の概念の二色化にも成功している。これが多重配置の自由性から導かれていることは、きわめて興味深い。二色 chordal グラフとしての bicolor-eliminable グラフはまだ生まれたばかりの概念であるが、今後統計や組み合わせ論などの分野からのアプローチが進むことが期待され、その意味でも非常に意義深い研究であるといえるだろう。

## 2 発表論文リスト

### 2004 年度

- (i) Takuro Abe, The Elementary transformation of vector bundles on regular schemes. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 359, no. 9, pp4285–4295, 2007.
- (ii) Takuro Abe and Masahiko Yoshinaga, Splitting criterion for reflexive sheaves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, posted on 11 February, 2008, PII: S 0002-9939(08)09367-2, to appear in print.

### 2005 年度

- (iii) Takuro Abe, The stability of the family of  $A_2$ -type arrangements. *J. Math. Kyoto Univ.* Vol. 46, no. 3, pp617–636, 2006.

### 2006 年度

- (iv) Takuro Abe, The stability of the family of  $B_2$ -type arrangements. *Hokkaido University Preprint Series* 790, 2006.
- (v) Takuro Abe, The freeness of  $A_2$  and  $B_2$ -type arrangements and lattice cohomologies. 数理解析研究所講究録 1501 (Recent Topics on Real and Complex Singularities), pp31–46.
- (vi) Takuro Abe, Faces of arrangements of hyperplanes and Arrow’s impossibility theorem. *Hokkaido University Preprint Series* 805, 2006.
- (vii) Takuro Abe, Hiroaki Terao and Max Wakefield, The characteristic polynomial of a multiarrangement. *Adv. in Math.* Vol. 215, pp825–828, 2007.
- (viii) Takuro Abe, Hiroaki Terao and Max Wakefield, The Euler multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements. *J. London Math. Soc.* 2008; doi:10.1112/jlms/jdm110, to appear in print.

- (ix) Takuro Abe, Free and non-free multiplicity on the deleted  $A_3$  arrangement. *Proc. Japan Acad., Ser. A* Vol. 83, no. 7, pp99–103, 2007.

#### 2007 年度

- (x) Takuro Abe, Construction of rank two reflexive sheaves from finite fields. To appear in 数理解析研究所考究録 (Geometry and Analysis on Complex Algebraic varieties), 2007.
- (xi) Free and non-free multiplicity on multiarrangements of hyperplanes. *Proc. 19th comm. alg. seminar in Japan*, pp1–17, 2007.
- (xii) Takuro Ane and Yasuhide Numata, Exponents of 2-multiarrangements and multiplicity lattices. arXiv:0706.0009, 2007.
- (xiii) Takuro Abe and Masahiko Yoshinaga, Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities. arXiv:0708.3228, 2007.
- (xiv) Takuro Abe, Koji Nuida and Yasuhide Numata, Bicolor-eliminable graphs and free multiplicities on the braid arrangement. arXiv:0712.4110, 2007.

### 3 口頭発表リスト

#### 2002 年度

- (1) The elementary transformation in the view of Maximal Cohen-Macaulay sheaves on divisors. 京都大学代数幾何セミナー, 京都大学, 2003 年 1 月 24 日.

#### 2003 年度

- (2) The Elementary Transformation of vector bundles on regular schemes. 九州大学代数幾何セミナー, 九州大学, 2003 年 11 月 4 日.
- (3) 正則スキーム上のベクトル束の基本変換. 城崎新人セミナー, 城崎市総合福祉会館, 2004 年 2 月 18 日.
- (4) 正則スキーム上のベクトル束の基本変換. 日本数学会年会, 筑波大学, 2004 年 3 月 29 日.

#### 2004 年度

- (5) Hyperplane arrangements and vector bundles on projective spaces. 九州大学代数幾何セミナー, 九州大学, 2005 年 3 月 8 日.

- (6)  $\mathbf{P}_k^n$  上の反射層の分裂性判定条件. 日本数学会年会, 日本大学, 2005 年 3 月 29 日.

#### 2005 年度

- (7) Splitting problems of sheaves on projective spaces. 複素幾何セミナー, 京都大学数理解析研究所, 2005 年 4 月 16 日.
- (8) Freeness of arrangements and an Endomorphism sheaf on the intersection lattices. “Arrangements of Hyperplanes” - Algebra, Combinatorics, Geometry, and Topology, Centro Stefano Franscini, Ascona, Switzerland, 19 May 2005.
- (9) The stability of  $A_2$ -type arrangements. 複素幾何セミナー, 首都大学東京, 2005 年 11 月 2 日.
- (10) The stability of  $A_2$ -type arrangements. Recent Topics on Real and Complex Singularities, 京都大学数理解析研究所, 2005 年 11 月 28 日.
- (11) The stability of  $A_2$  and  $B_2$ -type arrangements. 京都大学代数幾何セミナー, 京都大学, 2005 年 12 月 9 日.
- (12) The stability of Coxeter type arrangements. 第二回数学総合若手研究集会, 北海道大学, 2006 年 2 月 16 日.
- (13) ルート系に付随した超平面配置の安定性について. 日本数学会年会, 中央大学, 2006 年 3 月 26 日.

#### 2006 年度

- (14) The stability of  $A_2$  and  $B_2$ -type arrangements. 北海道大学 COE 講演会, 北海道大学, 2006 年 4 月 21 日.
- (15) 超平面配置と対数的ベクトル場の幾何. 北海道大学 COE 研究員連続講演会, 北海道大学, 2006 年 5 月 30 日, 6 月 6 日.
- (16) The stability of  $A_2$  and  $B_2$ -type arrangements. Recent Developments in Arrangements and Configuration Spaces, MSRI, Berkeley, United States of America, 10 August 2006.
- (17) The stability of  $A_2$  and  $B_2$ -type arrangements. Geometry and Analysis on Complex Algebraic Geometry, Independent University of Moscow, Moscow, Russia, 17 August 2006.
- (18) The addition-deletion theorem for multiarrangements. 超平面配置セミナー, 北海道大学, 2006 年 11 月 15 日.

- (19) The addition-deletion theorem for multiarrangements. 九州大学代数幾何セミナー, 九州大学, 2006年11月22日.
- (20) The addition-deletion theorem for multiarrangements. Mini-Workshop on Hyperplane Arrangements, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 6 December 2006.
- (21) Construction of rank two reflexive sheaves from finite fields. Geometry and Analysis on Complex Algebraic Geometry, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, Japan, 11 December 2006.
- (22) The addition-deletion theorem and characteristic polynomial for multiarrangements. 京都大学代数幾何セミナー, 京都大学, 2007年1月26日.
- (23) 超平面配置の対数的ベクトル場とその自由性. 第19回可換環論セミナー, 九州大学, 2007年1月29日, 30日.
- (24) 多重配置の自由性に関する加除定理. 日本数学会年会, 埼玉大学, 2007年3月27日.

#### 2007年度

- (25) Free and non-free multiplicity on hyperplane arrangements. Mathematics Seminars 2007, ICTP, Trieste, Italy, 29 May 2007.
- (26) The addition-deletion theorems for multiarrangements and graphic multiplicities of the braid arrangement. CIMPA summer school on arrangements and local systems, Galatasaray University, Istanbul, Turkey, 18 June 2007.
- (27) Multiplicity lattice on 2-arrangements. Geometry and Analysis on Complex Algebraic Varieties, Krasnoyarsk, Russia, 19 August 2007.
- (28) 多重配置の特性多項式と対数的ベクトル場のチャーヌ類. 日本数学会秋季総合分科会, 東北大学, 2007年9月22日.
- (29) Free arrangements of hyperplanes and two restricted multiarrangements. 名古屋大学代数幾何セミナー, 名古屋大学, 2007年11月12日.
- (30) Arrow's impossibility theorem and hyperplane arrangements. 岐阜代数幾何学セミナー, 岐阜聖徳学園大学, 2007年11月14日.
- (31) A criterion for non-freeness of multiarrangements. 岐阜代数幾何学セミナー, 岐阜聖徳学園大学, 2007年11月15日.

- (32) Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities. Geometry and Analysis on Complex Algebraic Varieties, Tokyo University of Agriculture and Technology, Tokyo, Japan, 21 November 2007.
- (33) Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities. 九州大学代数幾何セミナー, 九州大学, 2007年12月5日.
- (34) Duality of the logarithmic vector fields of multi-Coxeter arrangements. 超幾何方程式研究集会 2008, 神戸大学, 2008年1月8日.
- (35) Bicolor-eliminable graphs and free multi-braid arrangements. 京都大学代数幾何セミナー, 京都大学, 2008年1月11日.
- (36) A characterization of some multiplicities on Coxeter arrangements. 超平面配置の様々な側面, 神戸大学, 2008年2月4日.
- (37) Bicolor-eliminable multiplicities on the braid arrangement. 第四回数学総合若手研究集会, 北海道大学, 2008年2月12日.