

2006 年度研究成果報告

北海道大学大学院 理学研究院 COE 学術研究員
阿部 拓郎

1 研究内容・成果及び2006年度研究活動報告

私の主な研究対象である超平面配置とは、体上のベクトル空間内の超平面の有限族である。この極めてシンプルな幾何学的対象に対しては、組み合わせ論、位相幾何学、代数幾何学などからの様々な数学的アプローチが存在する。その中でも超平面配置に接するベクトル場のなす対数的ベクトル場は、寺尾宏明や Yuzvinsky らによって様々な研究が行われている代数、代数幾何学的対象である。対数的ベクトル場が自由加群となるとき、超平面配置は自由であるといい、超平面配置の中でも非常に良い性質をもつものとして研究が進んでいる。例えば自由な超平面配置は、組み合わせ論あるいは超平面配置の補集合のトポロジーを調べる際に威力を発揮する、超平面配置の研究には欠かせない対象である。

私はこの対数的ベクトル場の自由性、及びその代数幾何学的な観点からの研究を行っており、最終的には寺尾予想と呼ばれる、本分野における最重要未解決問題へのアプローチを試みたいと考えている。

以下、2006 年度に得られた結果について、いくつかに分けて詳述する。

1.1 多重配置とその自由性 [論文 (vii), (viii)]

超平面配置に対して、その各超平面に正整数の重複度を乗せたものを多重配置と呼ぶ。多重配置は二十年ほど前に Ziegler が導入した概念であるが、その重要性はなかなか認識されていなかった。これに対し吉永正彦は近年、超平面配置の自由性と、多重配置の自由性を代数幾何学的手法を用いて関連付けることに成功した。結果として多重配置とその自由性に関する研究が重要となったが、それにはいくつかの問題が存在していた。

一つは、自由な多重配置を構成する方法が存在しなかった点である。自由な超平面配置は、古典的なコクセター配置やファイバー型配置などの例があり、また寺尾による加除定理を用いることで、多くの実例が構成可能であったが、多重配置についてはほとんど知られていなかった。結果、自由な多重配置がどれほど存在するかという点が全くわからず、多重配置の代数的研究を阻害する一因となっていた。

もう一つは、与えられた多重配置が自由でないことを見分ける方法が存在しなかった点にある。超平面配置の場合、その組み合わせ論的情報から計算できるポアンカレ多項式の分裂を調べることで自由でないことが判定できた。しかしながら、多重配置についてはこのようなよい組み合わせ論的不変量が

存在しないことが知られており、非自由性の判定については Macaulay2 などの計算プログラムを使う以外、有効な方法は知られていなかった。

この二つの問題に対し私は、寺尾及び Wakefield との共同研究を通して、多重配置の自由性に関する新たな結果を示すことに成功した。すなわち、最初の問題に対しては、 e -multiplicity たる概念を導入することで、超平面配置の加除定理を多重配置へと拡張することに成功した。結果、今まで知られていなかった多くの自由な多重配置を得ることに成功し、また多重超可解配置という自由多重配置の族を定義することもできた。更に二つ目の問題に対しては、多重配置に対して代数的観点からポアンカレ多項式を定義し、その係数と多重配置の局所代数的情報とを結びつける公式を示すことで、非自由性の新しい判定方法を見出すことに成功した。これを用いることで、やはり今まで知られていなかった多くの自由でない多重配置を見出すことが出来た。

これらの結果は、多重配置の自由性の研究における新しい基礎といえ、結果として多重配置の対数的ベクトル場に関する研究は、新しい段階へと移行しつつあるといえよう。

1.2 $A_3 - 1$ 型配置の自由重複度 [論文 (ix)]

先の結果を受けて、自然と表れる問題として次のものがある。すなわち、超平面配置を固定したとき、その上のどのような重複度が多重配置を自由に、あるいは自由でないものにするか、という問題である。ある超平面配置に対して、それを自由とするような重複度を自由重複度と呼ぶ。例えば座標平面からなる配置上の全ての重複度は自由重複度であり、また一般的な配置と呼ばれるものは自由重複度を持たないことがわかっていて、よって次に問題となるのは、自由重複度とそうでないものを両方許容する配置における重複度の分類である。私は A_3 型のコクセター配置から一本の平面を除くことで得られる $A_3 - 1$ 型の配置に対し、この分類を行うことに成功した。またこの自由重複度は、重複度全体のなすモジュライ空間の中で、二枚の超平面の補空間がなす四つの部屋のうちの三つと完全に一致することも解った。これを先鞭とし、以後様々な超平面配置の上の自由重複度の分類の組み合わせ論、あるいは幾何学が進歩してゆくと考えられる。

1.3 Arrow の不可能性定理と超平面配置 [論文 (vi)]

経済学における結果に、Kenneth Arrow の不可能性定理と呼ばれるものがある。大まかに述べるとこの定理は、ある社会モデルにおける意思決定のプロセスを明らかにした結果であるが、この定理を寺尾は、超平面配置の、主に組み合わせ論の言葉を用いて証明し、かつ数学的に拡張した結果を与えた。私はそれを踏まえ、最初のモデルを拡張したものを数学的に一般化した定理を証明することに成功した。この、社会選択モデルと超平面配置の関係については他にも見出しうる部分があり、今後の更なる研究が期待される。

2 発表論文リスト

2004 年度

- (i) Takuro Abe, The Elementary transformation of vector bundles on regular schemes. to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- (ii) Takuro Abe and Masahiko Yoshinaga, Splitting criterion for reflexive sheaves. preprint, RIMS-1496, 2005.

2005 年度

- (iii) Takuro Abe, The stability of the family of A_2 -type arrangements. J. Math. Kyoto Univ. no. 46. Vol. 3, pp617–636, 2006.

2006 年度

- (iv) Takuro Abe, The stability of the family of B_2 -type arrangements. Hokkaido University Preprint Series 790, 2006.
- (v) Takuro Abe, The freeness of A_2 and B_2 -type arrangements and lattice cohomologies. 数理解析研究所講究録 1501 (Recent Topics on Real and Complex Singularities), pp31–46.
- (vi) Takuro Abe, Faces of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem. Hokkaido University Preprint Series 805, 2006.
- (vii) Takuro Abe, Hiroaki Terao and Max Wakefield, The characteristic polynomial of a multiarrangement. Hokkaido University Preprint Series 818, 2006.
- (viii) Takuro Abe, Hiroaki Terao and Max Wakefield, The e -multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements. Hokkaido University Preprint Series 823, 2006.
- (ix) Takuro Abe, Free and non-free multiplicity on the arrangement of type $A_3 - 1$. Hokkaido University Preprint Series 826, 2007.

3 口頭発表リスト

2002 年度

- (1) The elementary transformation in the view of Maximal Cohen-Macaulay sheaves on divisors. 京都大学代数幾何セミナー, 京都大学, 2003 年 1 月 24 日.

2003 年度

- (2) The Elementary Transformation of vector bundles on regular schemes. 九州大学代数幾何セミナー, 九州大学, 2003 年 11 月 4 日.
- (3) 正則スキーム上のベクトル束の基本変換. 城崎新人セミナー, 城崎市総合福祉会館, 2004 年 2 月 18 日.
- (4) 正則スキーム上のベクトル束の基本変換. 日本数学会年会, 筑波大学, 2004 年 3 月 29 日.

2004 年度

- (5) Hyperplane arrangements and vector bundles on projective spaces. 九州大学代数幾何セミナー, 九州大学, 2005 年 3 月 8 日.
- (6) \mathbf{P}_k^n 上の反射層の分裂性判定条件. 日本数学会年会, 日本大学, 2005 年 3 月 29 日.

2005 年度

- (7) Splitting problems of sheaves on projective spaces. 複素幾何セミナー, 京都大学数理解析研究所, 2005 年 4 月 16 日.
- (8) Freeness of arrangements and an Endomorphism sheaf on the intersection lattices. “Arrangements of Hyperplanes” - Algebra, Combinatorics, Geometry, and Topology, Centro Stefano Franscini, Ascona, Switzerland, 19 May 2005.
- (9) The stability of A_2 -type arrangements. 複素幾何セミナー, 首都大学東京, 2005 年 11 月 2 日.
- (10) The stability of A_2 -type arrangements. Recent Topics on Real and Complex Singularities, 京都大学数理解析研究所, 2005 年 11 月 28 日.
- (11) The stability of A_2 and B_2 -type arrangements. 京都大学代数幾何セミナー, 京都大学, 2005 年 12 月 9 日.
- (12) The stability of Coxeter type arrangements. 第二回数学総合若手研究会, 北海道大学, 2006 年 2 月 16 日.
- (13) ルート系に付随した超平面配置の安定性について. 日本数学会年会, 中央大学, 2006 年 3 月 26 日.

2006 年度

- (14) The stability of A_2 and B_2 -type arrangements. 北海道大学 COE 講演会, 北海道大学, 2006 年 4 月 21 日.
- (15) 超平面配置と対数的ベクトル場の幾何. 北海道大学 COE 研究員連続講演会, 北海道大学, 2006 年 5 月 30 日, 6 月 6 日.
- (16) The stability of A_2 and B_2 -type arrangements. Recent Developments in Arrangements and Configuration Spaces, MSRI, Berkeley, United States of America, 10 August 2006.
- (17) The stability of A_2 and B_2 -type arrangements. Geometry and Analysis on Complex Algebraic Geometry, Independent University of Moscow, Moscow, Russia, 17 August 2006.
- (18) The addition-deletion theorem for multiarrangements. 超平面配置セミナー, 北海道大学, 2006 年 11 月 15 日.
- (19) The addition-deletion theorem for multiarrangements. 九州大学代数幾何セミナー, 九州大学, 2006 年 11 月 22 日.
- (20) The addition-deletion theorem for multiarrangements. Mini-Workshop on Hyperplane Arrangements, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 6 December 2006.
- (21) Construction of rank two reflexive sheaves from finite fields. Geometry and Analysis on Complex Algebraic Geometry, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, Japan, 11 December 2006.
- (22) The addition-deletion theorem and characteristic polynomial for multiarrangements. 京都大学代数幾何セミナー, 京都大学, 2007 年 1 月 26 日.
- (23) 超平面配置の対数的ベクトル場とその自由性. 第 19 回可換環論セミナー, 九州大学, 2007 年 1 月 29 日, 30 日.