

研究活動報告

1. 研究内容

水をはじめとする非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式やその線形化方程式である Stokes 方程式を中心とする偏微分方程式の研究を行っています. Navier-Stokes 方程式の数学的解析は, 1934 年の Leray の研究に始まり, 以後さかんに議論が繰り広げられています. しかし, 70 年以上経過した現在に至っても, Leray が構成した弱解の一意性と正則性については未解決のままとなっています.

これらの問題の解決が究極の目標ですが, 現在のところは平行平板間の領域における Navier-Stokes 方程式の解析を研究対象としています. 同方程式の研究は領域が非有界な場合, 全空間や外部領域の場合には多くの優れた研究結果が得られていますが, コンパクトでない境界をもつ領域の場合の研究は, 半空間の場合を除きあまり行われていないのが現状です. 私の研究では, 全空間や外部領域の場合に得られている結果を平行平板間の場合に拡張し, 数学的理論の基本的な展開を完成させることを目標にしています.

2. 研究成果

(1) 平行平板間における Stokes 作用素に対する解析的半群の存在

Navier-Stokes 方程式の初期値問題に対する強解の構成は, Duhamel の原理により, 積分方程式の解, いわゆる mild solution を構成することに帰着されます. その際に用いられるのが Stokes 半群と呼ばれる解析的半群です. 領域に境界がある場合, Stokes 作用素が解析的半群の生成作用素になることを示すのは意外に厄介で, 有界領域の場合であっても, 証明されたのは 1981 年と比較的最近のことです. 私の研究では, 平行平板間の領域に対してこの問題を考察しました. この結果により, 1984 年の Kato や 1985 年の Giga-Miyakawa と同様の方法で, n 乗可積分関数を初期値とする Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題に対する時間局所解の一意存在を示すことができます. また, 初期値の L^n -ノルムが十分小さい場合には時間大域解の一意存在を示すことができます.

(2) 有界な特別解の安定性

平行平板間における Stokes 作用素が解析的半群の生成作用素になることの証明には, Stokes 方程式に対するレゾルベント問題の考察が基本となります. その際に, 領域の一方向への有界性を本質的に用いて, 0 が Stokes 作用素のレゾルベント集合に属することを示しました. 通常, 線形化方程式の生成する解析的半群は, 領域が有界な場合には指数減衰, 非有界な場合には多項式減衰の形で求まることが多いのですが, この事実により, 領域が非有界であるにもかかわらず Stokes 半群が指数減衰性をもつことがわかります. この性質を利用して, 平行平板間における Navier-Stokes 方程式の特別解として知られている Couette 流や Poiseuille 流の安定性を, 通常の L^p -空間の枠組で論じました.

(3) 平行平板間における Stokes 方程式の定常問題に対する解の存在と一意性

平行平板間における Stokes 方程式の定常問題について, 外力が Sobolev 空間や Besov 空間に属する場合の解の存在と一意性に関する結果を得ました. 上述 (1) の研究は,

通常の L^p -空間 ($1 < p < \infty$) の枠組で扱っており, $p = 1$ および $p = \infty$ の場合は扱っていませんが, ここでは非斉次 Besov 空間を用いることにより, これらの場合も含めて議論をしている点が特徴です. $p = \infty$ の場合は解の一意性は成り立ちませんが, 適当な条件のもとに, 斉次方程式の解は Poiseuille 流に限られることを証明しました. その双対として, $p = 1$ の場合には外力が特別な条件を満たさなければ可解になりません. そこで, 可解性のために必要な外力の満たすべき代数的条件を与えました.

3. 2004 年度研究活動報告

(1) 発表論文

- (i) (with M. Yamazaki) On a stationary problem of the Stokes equation in an infinite layer in Sobolev and Besov spaces, (発表予定).

概要: 平行平板間における Stokes 方程式の定常問題において, 外力が Sobolev 空間や斉次および非斉次 Besov 空間に属する場合の解の存在と一意性を, [2] で得た解の公式をもとに議論しました.

(2) 口頭発表

- (i) 平行平板間の領域における Stokes 方程式の定常問題, 偏微分方程式セミナー, 北海道大学, 2004 年 4 月.
- (ii) ストークス方程式のレゾルベント問題について, 第 3 回 COE 研究員連続講演会, 北海道大学, 2004 年 6 月.

(3) 2004 年度の研究内容

これまでの研究で, 平行平板間における Stokes 作用素が L^p -空間において解析的半群を生成することを示しましたが, それは $1 < p < \infty$ の場合に対してであり, $p = 1$ および $p = \infty$ の場合については未解決となっています. 今年度の研究は,

「平行平板間における Stokes 作用素は L^∞ において解析的半群を生成するか？」

という問題を解決することを目的としています. 領域が半空間の場合には, Desch-Hieber-Prüss によりこの問題は肯定的に解決されています. 平行平板間においてこの問題が肯定的に解決されれば, 空間無限遠方で減衰しない時間局所解の構成や有界な特別解の安定性や不安定性を, 指数 p が ∞ に一致する空間で議論することが可能になります. これらの諸問題に対する解答を与えることが今後私の取り組むべき研究課題となります.

4. 発表論文リスト

- [1] (with Y. Shibata) On a resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 469-497.
- [2] (with Y. Shibata) On a resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, part 2 $\lambda = 0$ case, J. Math. Fluid Mech. **5** (2003), 245-274.

- [3] On a resolvent estimate of the Stokes equation with Neumann-Dirichlet type boundary condition on an infinite layer, *Math. Meth. Appl. Sci.* **27** (2004), 1007-1048.
- [4] (with M. Yamazaki) On a stationary problem of the Stokes equation in an infinite layer in Sobolev and Besov spaces, (発表予定).

講究録

- (i) On the Stokes and Navier-Stokes flows between parallel planes, *数理解析研究所講究録* 1234, 2001 年 10 月, 195-205.
- (ii) (with Y. Shibata) On the Stokes and Navier-Stokes flows between parallel planes, *数理解析研究所講究録* 1235, 2001 年 10 月, 160-191.

5. 口頭発表のリスト

- (i) A Stokes flow between the parallel planes
日本数学会函数方程式論分科会, 慶応大学, 2001 年 3 月.
- (ii) On the Stokes and Navier-Stokes flows between parallel planes
Tosio Kato's Method and Principle for Evolution Equations in Mathematical Physics, 北海道大学, 2001 年 6 月.
- (iii) On the Stokes and Navier-Stokes flows between parallel planes
調和解析学と非線形偏微分方程式, 京都大学, 2001 年 7 月.
- (iv) 平行平板領域における Stokes 作用素のレゾルベント問題について
第 23 回発展方程式若手セミナー, 愛媛, 2001 年 8 月.
- (v) A stability theory for the Navier-Stokes flow between the parallel planes
日本数学会函数方程式論分科会, 九州大学, 2001 年 10 月.
- (vi) 平行平板の間における Stokes 作用素のレゾルベント問題
日本数学会函数方程式論分科会, 九州大学, 2001 年 10 月.
- (vii) On a generalized resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer
数値流体と確率解析, 東北大学, 2001 年 11 月.
- (viii) On a Stokes resolvent problem on an infinite layer
日本数学会函数方程式論分科会, 明治大学, 2002 年 3 月.
- (ix) 平行平板内の領域における Stokes 方程式の定常問題
日本数学会函数方程式論分科会, 東京大学, 2003 年 3 月.
- (x) 平行平板間の領域における Stokes 方程式の定常問題
偏微分方程式セミナー, 北海道大学, 2004 年 4 月.
- (xi) ストークス方程式のレゾルベント問題について
COE 研究員連続講演会, 北海道大学, 2004 年 6 月.