COE ポスドク研究員研究活動報告

北海道大学大学院理学研究科 COE 研究員　阿部 孝之

1．研究内容・成果

非圧縮性粘性流体の数学的な解析において，流体の占める領域が全空間や外部領域の場合には既に多くの優れた結果が得られているが，境界がコンパクトでない領域についての研究は半空間の場合以外は少なく，今後いっそうの発展が期待される分野である．

これまで行ってきた研究の目的は，n 次元 Euclid 空間における平行平板内の領域 $\Omega_h = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},\ 0 < x_n < h\}$ を占める粘性流体の数学解析を，近年飛躍的に発展した実解析的手法を用いて行うことである．以下，研究結果の概要を述べる．

まずは Ω_1 における Stokes 方程式のレゾルベント問題

$$(1) \qquad \begin{cases} (\lambda - \Delta)u + \nabla \mathfrak{p} = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega_1, \\ \hfill u|_{\partial\Omega_1} = 0 \end{cases}$$

を，通常の L^p-空間の枠組で扱った．方法は以下の通りである．まず (1) に x' 方向の Fourier 変換をほどこして問題を常微分方程式の二点境界値問題に変換し，その解に再び x' 方向の Fourier 逆変換をほどこして (1) の解の公式を求める．そしてこの公式に Fourier multiplier の定理と Agmon-Douglis-Nirenberg による特異積分作用素の評価に関する補題を適用して，最良のレゾルベント評価を得た．この評価からただちに Ω_1 上の Stokes 作用素は解析半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ を生成し，L^p-L^q 評価

$$\|\nabla^k e^{-tA} a\|_{L^q(\Omega_1)} \leq C_{p,q,k} e^{-\delta_{p,q} t} t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{k}{2}} \|a\|_{L^p(\Omega_1)}, \quad 1 < p \leq q < \infty$$

が成り立つことがわかる．従って (1) に対応する非定常 Navier-Stokes 方程式の時間局所解の一意存在や，small data の仮定のもとで時間大域解の一意存在が得られる．通常，線形化方程式の生成する解析半群は，領域が有界な場合には指数減衰，非有界な場合には多項式減衰であることが多いが，Ω_1 の x_n 方向への有界性を用いて $\lambda = 0$ がレゾルベント集合に属することを示したため，Ω_1 上の Stokes 半群が指数減衰することを得た点が一つの特徴である．この性質の応用として，平行平板内の領域における特解である Couette 流 $u(x) = k(x_n, 0, \ldots, 0)$, $\mathfrak{p}(x) = \mathfrak{p}_0$ や Poiseuille 流 $u(x) = k(x_n(1-x_n), 0, \ldots, 0)$, $\mathfrak{p}(x) = 2kx_1$ の安定性を扱った．この問題は次の問題に対する時間大域解 w の存在と漸近挙動の解析に帰着される．

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + ku_1 \dfrac{\partial w}{\partial x_1} + w_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} + (w \cdot \nabla) w + \nabla \pi = 0, \quad \nabla \cdot w = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \times (0, \infty), \\ \hfill w|_{\partial\Omega_1} = 0, \\ \hfill w|_{t=0} = a \quad \text{in } \Omega_1. \end{cases}$$

この問題に関して，$|k|$ および初期摂動 $a \in L^n(\Omega_1)$ が十分小さければ，時間大域解 $w(t, \cdot) \in BC\big([0,\infty); L^n_\sigma(\Omega_1)\big)$ が一意的に存在することを示し，またその漸近挙動を求めた．従ってこの条件の下で Couette 流や Poiseuille 流は L^p-空間の枠組で安定であることがわかる．証明は先に得た解析半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ を用いて (2) を積分方程式に変換し，逐次近似で解を構成する方法によるが，その際に Ω_1 の x_n 方向の有界性と $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ が指数減衰することを本質的に用いている．

次に境界条件を変えて，$x_n = 0$ 上では Dirichlet 境界条件，$x_n = h$ 上では非斉次 Neumann 境界条件を課した次のレゾルベント問題

$$\begin{cases} \lambda u - \operatorname{Div} T(u, \mathfrak{p}) = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \qquad\qquad \text{in } \Omega_h, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u|_{x_n=0} = 0, \\ \qquad\qquad \nu \cdot T(u, \mathfrak{p})|_{x_n=h} = g|_{x_n=h} \end{cases}$$

を解析した．平板上領域に存在する流体の自由境界問題は，通常方程式を Lagrange 座標を用いて変換する方法によって研究されているが，この方法は初期値の滑らかさが小さい場合には適用できない．本研究は，この場合に自由境界問題を研究する際の基礎となる，発展性に富んだものである．この問題に対しても最良のレゾルベント評価を得た．証明の基本的な方針は先程と同様であるが，この問題では圧力 $\mathfrak{p}$ の境界条件が与えられており，u と $\mathfrak{p}$ を同時に構成しなければならない．そのため常微分方程式の二点境界値問題を解く際に 6×6 の Lopatinski 行列が現れ，解析をより困難なものにしている．

最後に，外力 f が Sobolev 空間や Besov 空間に属する場合の Stokes 方程式の定常問題

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla \mathfrak{p} = f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega_1, \\ \qquad\qquad\qquad u|_{\partial\Omega_1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

を解析した．これまでの結果は，Fourier multiplier の定理と Agmon-Douglis-Nirenberg による補題を基礎としているため，$p = 1, \infty$ の場合は扱っていない．Besov 空間で考える場合には，それらの代わりに Young の不等式と Poisson 核の理論を用いることで，$p = 1, \infty$ の場合も含めて扱うことができる．$p = \infty$ の場合は Poiseuille 流が $f = 0$ に対する (3) の解となるため解の一意性が成り立たないが，このことの双対として，$p = 1$ の場合，解の存在のためには外力が代数的な条件を満たす必要がある．$p = 1$ の場合には $f \in L^1\big(0, 1; \dot{B}^0_{1,1}(\mathbb{R}^{n-1})\big)$ という条件が解の存在に必要であるが，この条件からほとんどすべての $x_n \in (0, 1)$ に対して等式 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', x_n)dx' = 0$ が成り立つことが従い，これが求める代数的条件である．この結果は，解の一意存在が必ずしも成り立たない枠組で，解の存在のための条件を正確に与えている点で意義が大きい．また，数式で表示できる特解として得られた Poiseuille 流の，関数空間論の立場からの特徴付けを与えたものとして興味深い．さらに $p = \infty$ の場合に現れる関数空間は定数を法とするものであり，その取扱いは既知の理論には存在しない本質的な困難を伴った．さらに，Poiseuille 流の安定性は L^p-空間の枠組においては既に示したが，Poiseuille 流自身の属する空間である，指数 p が ∞ と一致する空間の枠組で考える方がより自然である．ここで得た結果はこの問題を考える際の出発点を与えるものであり，極めて重要なものといえる．

2003 年度研究活動報告

1. 研究集会「調和解析学と非線形偏微分方程式」に出席，京都大学，2003 年 7 月
2. 研究集会「流体と気体の数学解析」に出席，京都大学，2003 年 7 月
3. (口頭発表) Research on the Stokes and the Navier-Stokes equations in an infinite layer
   早稲田大学，2003 年 10 月
4. 研究集会「第 5 回北東数学解析研究会」に出席，北海道，2004 年 2 月

2. 発表論文リスト

1. (with Y. Shibata) On a resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, J. Math. Soc. Japan **55** (2003), 469-497.
2. (with Y. Shibata) On a resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, part 2 $\lambda = 0$ case, J. Math. Fluid Mech. **5** (2003), 245-274.
3. On a resolvent estimate of the Stokes equation with Neumann-Dirichlet type boundary condition on an infinite layer, Math. Meth. Appl. Sci., to appear.

プレプリント

1. (with Y. Shibata) On a generalized resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, part 1 $|\lambda| > 0$ case, Advanced Research Institute for Science and Engineering, Waseda University, Technical Report No.2001-13.
2. (with Y. Shibata) On a generalized resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer, part 2 $\lambda = 0$ case, Advanced Research Institute for Science and Engineering, Waseda University, Technical Report No.2001-15.

3. 主たる口頭発表のリスト

1. A Stokes flow between the parallel planes
   日本数学会函数方程式論分科会，慶応大学，2001 年 3 月
2. On the Stokes and Navier-Stokes flows between parallel planes
   Tosio Kato's Method and Principle for Evolution Equations in Mathematical Physics，北海道大学，2001 年 6 月
3. On the Stokes and Navier-Stokes flows between parallel planes
   調和解析学と非線形偏微分方程式，京都大学，2001 年 7 月
4. 平行平板領域における Stokes 作用素のレゾルベント問題について
   第 23 回発展方程式若手セミナー，愛媛，2001 年 8 月
5. A stability theory for the Navier-Stokes flow between the parallel planes
   日本数学会函数方程式論分科会，九州大学，2001 年 10 月
6. 平行平板の間における Stokes 作用素のレゾルベント問題
   日本数学会函数方程式論分科会，九州大学，2001 年 10 月
7. On a generalized resolvent estimate of the Stokes equation on an infinite layer
   数値流体と確率解析，東北大学，2001 年 11 月
8. On a Stokes resolvent problem on an infinite layer
   日本数学会函数方程式論分科会，明治大学，2002 年 3 月
9. 平行平板内の領域における Stokes 方程式の定常問題
   日本数学会函数方程式論分科会，東京大学，2003 年 3 月